

Conjuntos Numéricos

Números Naturais

$N = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$ (Números naturais)

$N^* = \{1; 2; 3; \dots\}$ (Números naturais excluindo o zero)

Números Inteiros

$Z = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3 \dots\}$ (Números inteiros)

$Z^* = \{\dots; -3; -2; -1; 1; 2; 3 \dots\}$ (Números inteiros excluindo o zero)

Números Racionais

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} / a \in Z \wedge b \in Z^* \right\}$$

Exemplo:

$$\frac{3}{7}, \frac{-2}{5}, 4, \frac{-7}{8}, \frac{-1}{3} \quad \text{etc...}$$

Representado na forma decimal um n° racional tem um n° finito de casas decimais, ou é dízima periódica.

Números Irracionais

São números que representados na forma decimal apresentam uma quantidade infinita de decimais não periódicos.

Exemplo:

$$\sqrt{2} = 1,414236\dots$$

$$\sqrt{3} = 1,73320508\dots$$

$$\pi = 3,1415926\dots$$

Observação:

Subconjuntos importantes dos reais:

$\mathbb{R}_+$: Reais não negativos (inclui o zero).

$\mathbb{R}_-$: Reais não positivos (inclui o zero).

$\mathbb{R}^*$: Reais não nulos (exclui o zero).

Números Reais

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ é racional ou } x \text{ é irracional}\}$$

Só não são reais as raízes de índice par de radicando estritamente negativo.

Intervalos

Intervalo fechado

Quando incluímos os extremos.

Notação : $[a;b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$.



Exemplo:

$[-3; +5] = \{x \in \mathbb{R} / -3 \leq x \leq 5\}$.



Intervalo aberto

Quando não incluímos os extremos.

Notação : $]a; b[= \{ x \in \mathbb{R} / a < x < b \}$.



Exemplo:

$] -1; +3[= \{ x \in \mathbb{R} / -1 < x < +3 \}$.

Intervalo fechado só de um lado

Notação : $[a; b[= \{ x \in \mathbb{R} / a \leq x < b \}$



Exemplo:

$[2; 5[= \{ x \in \mathbb{R} / 2 \leq x < 5 \}$.



Intervalos Infinitos

Exemplos:

$[a; +\infty[= \{ x \in \mathbb{R} / x \geq a \}$



$] -\infty; b[= \{ x \in \mathbb{R} / x < b \}$



$[7; +\infty[= \{ x \in \mathbb{R} / x \geq 7 \}$



Teoria dos Conjuntos

Conjunto e elemento

São conceitos primitivos (não se definem). Para indicar que um elemento **a** é de um conjunto **A** escrevemos $a \in A$. O conjunto que **não tem elementos** é chamado **conjunto vazio**, e é indicado por $\emptyset$ ou $\{ \}$. Se todos os elementos de um conjunto **B** são elementos de um conjunto **A**, dizemos que **B** é um subconjunto de **A** e indicamos $B \subset A$. Demonstra-se que $A \subset A$ e $\emptyset \subset A$, qualquer que seja **A**.

Ex:

$$A = \{ a, e, i, o, u \}.$$

$$B = \{ x \} = \{ 0, 1, 2, 3 \} \text{ (lê-se: } x \text{ tal que } x \text{ pertence ao conjunto dos naturais e } x \text{ menor que } 4).$$

União/Intersecção

Entre dois conjuntos **A** e **B** podem ser definidas as seguintes operações:

$$(1^\circ) \text{ UNIÃO: } A \cup B = \{ X \mid X \in A \text{ ou } X \in B \}$$

$$(2^\circ) \text{ INTERSECÇÃO: } A \cap B = \{ X \mid X \in A \text{ e } X \in B \}$$

Ex:

$$\{2, 3\} \cup \{4, 5, 6\} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\{2, 3\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

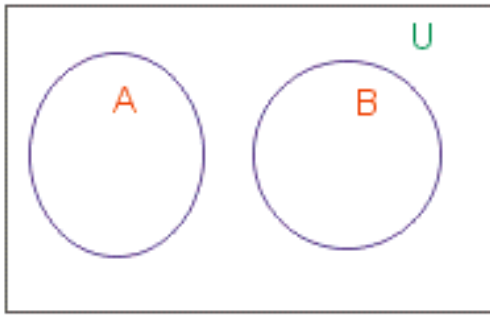
$$\{a, b\} \cup \emptyset = \{a, b\}$$

$$\{2, 3, 4\} \cap \{3, 5\} = \{3\}$$

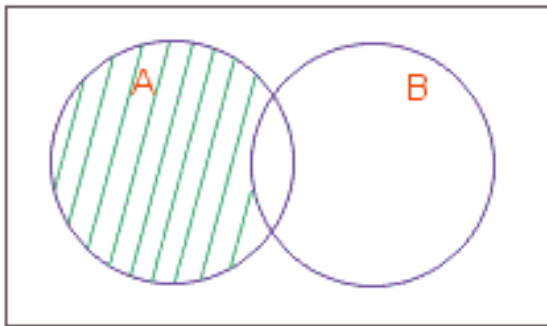
$$\{2, 3\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{2, 3\}$$

$$\{2, 4\} \cap \{3, 5\} = \emptyset$$

Se $A \cap B = \emptyset$ dizemos que A e B são disjuntos.



Diferença de 2 conjuntos



(3º) DIFERENÇA: $A - B = \{ X \mid X \in A \text{ e } X \notin B \}$

Ex:

$$A = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \} \quad B = \{ 2, 3 \} \quad A - B = \{ 0, 1, 4 \}$$

Conjunto Complementar

Quando $B \subseteq A$, o conjunto $A - B$ também é conhecido como conjunto complementar de B em relação a A e para tal usamos a notação:

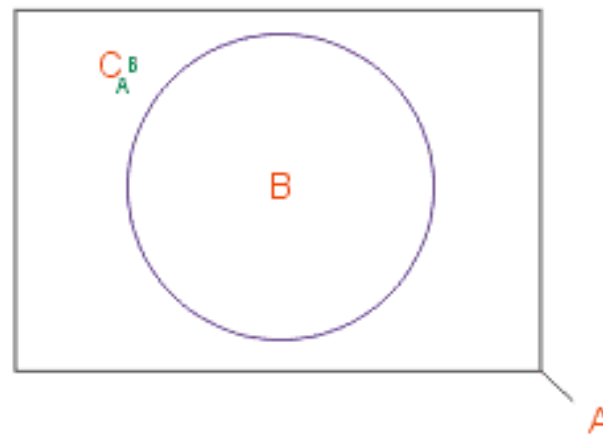
$$C_A^B = A - B = \{ x \mid x \in A \text{ e } x \notin B \}$$

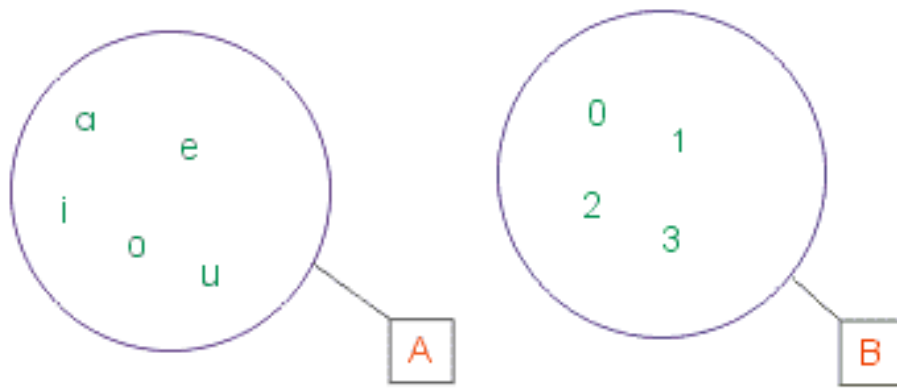
Exemplo:

$$A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

$$B = \{ 2, 3, 4 \}$$

$$C_A^B = A - B = \{ 1 \}$$





Observação:

Se x é um elemento de um conjunto A , temos:

$$\begin{aligned} x \in A &\rightarrow \{x\} \subset A \\ x \notin A &\rightarrow \{x\} \not\subset A \end{aligned}$$

Igualdade de conjuntos

Dizemos que o conjunto A é igual ao conjunto B quando $A \subset B \wedge B \subset A$

$$A = B \Rightarrow A \subset B \wedge B \subset A$$

Exemplo:

$$A = \{ 1; 2; 5 \} ; B = \{ 2; 5; 1 \}$$

Vemos que A e B têm os mesmos elementos:

$$A \subset B \text{ e } B \subset A \rightarrow A = B$$

3_4

Aritmética

1) Números primos

Definição

Dizemos que um número é primo quando ele só é divisível por ± 1 e por ele próprio: assim sendo P um número primo, ele deve satisfazer duas condições:

1) $P \neq 1$ e $P \neq -1$.

2) Conjunto dos divisores de P: $\{ \pm 1 ; \pm P \}$

Ex. ± 2 ; ± 3 ; ± 5 ; ± 7 ; ± 11 ; ± 13 ; ± 17 ; ± 19 ; ± 23 e etc...

Obs. note que os únicos números primos pares são ± 2 , pois qualquer outro número par seria divisível por 2 e assim violaria a definição.

Múltiplo e Divisor

Sejam dois números inteiros m e x, dizemos que m é múltiplo de x se, e somente se:

$$m = k \cdot x$$

onde $k \in \mathbb{Z}$ ou seja:

$$k \in \{ \dots - 3, - 2, - 1, 0, 1, 2, 3 \dots \}$$

Ex:

Dado o número 7 seus múltiplos são:

$$\{ 0, \pm 7; \pm 14; \pm 21; \pm 28 \dots \}$$

Analogamente podemos afirmar que x é um divisor de m pois $x = \frac{m}{k}$.

Ex:

Dar os divisores de 75.

$$D(75) = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15, \pm 25, \pm 75\}$$

Número composto

São números inteiros não nulos que têm mais de quatro divisores distintos.

Números primos entre si

Dois números inteiros são ditos primos entre si quando seu MDC for 1.

Ex:

Os números 1935 e 1024 são primos entre si.

Teorema

Sejam a e b dois inteiros não nulos:

temos que:

$$\text{MDC}(a, b) \cdot \text{MMC}(a, b) = |a \cdot b|$$

Máximo Divisor Comum e Mínimo Múltiplo Comum

Para encontrar o MDC e o MMC devemos decompor os números dados em fatores primos e proceder da seguinte forma:

MDC = Produto dos fatores comuns cada um deles com o **menor** expoente.

MMC = Produto dos fatores comuns e não comuns, cada um deles com o maior expoente.

Ex.

Calcular o MMC e o MDC entre 36 e 240.

Fatorandos ambos

$$\boxed{36} \boxed{2}$$

18	2
9	3
3	3
1	

Temos que $36 = 2^2 \cdot 3^2$.

240	2
120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$$240 = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^1$$

Assim:

$$\text{MMC} (240; 36) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 720$$

$$\text{MDC} (240; 36) = 2^2 \cdot 3^1 = 12$$

Números Par e Ímpar

Número Par

Definição

Um número inteiro é dito par se e somente se ele for múltiplo de 2 ou seja, ele pode ser escrito na forma $2n$ onde $n \in \mathbb{Z}$.

Número Ímpar

Definição

Um número inteiro é dito ímpar quando ele não pode ser escrito como múltiplo de dois. Neste caso ele é representado na forma $2n + 1$ $n \in \mathbb{Z}$.

Ex:

13 é ímpar pois $13 = 2 \cdot 6 + 1$

$-8 = 2 \cdot (-4)$, portanto é par.

4_3

Página 1

Matérias > Matemática > Grandezas Proporcionais

Grandezas Proporcionais

Razão

Razão de 2 números a e b com $b \neq 0$ é a divisão do primeiro pelo segundo ou seja: $\frac{a}{b}$

Ex:

5 e $3 \rightarrow \frac{5}{3}$ (dizemos que 5 "está para" 3)

Proporção

Proporção é a igualdade de razões:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ com } b, d \neq 0$$

Dizemos que a está para b assim como c está para d :

a e d os extremos, b e c são os meios

Teorema

Se a, b, c, d definem uma proporção então:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow ad = bc$$

Porcentagem

É uma razão em que o denominador é 100.

Ex:

$$37\% = \frac{37}{100}$$

Importante: quando dizemos p por cento de uma grandeza devemos fazer 100 vezes esta grandeza.

Ex:

$$20\% \text{ de } 18 = \frac{20}{100} \times 18 = 3,6$$

Juros:

É uma compensação que se recebe ao dispor uma quantia para outra pessoa (física ou jurídica) . O juro recebido depende do tempo , da quantia emprestada (chamada capital ou principal) e da taxa estabelecida no ato do empréstimo que pode ser diária, mensal ou anual .

Montante:

É o capital inicial acrescido do juro. Chama-se também capital acumulado. O montante pode ser determinado de duas formas ou regimes:

a) Regime de Capitalização Simples:

No regime de capitalização simples , os juros gerados em cada período são constantes.

$$M = C + J$$

b) Regime de Capitalização Composta:

No regime de capitalização composta , os juros gerados em cada período se agregam ao capital e essa soma passa a gerar juros para o próximo período , e assim por diante para todos os períodos . Para calcular o montante (M) formado por um capital (C) a uma taxa de juros (i) , após t períodos de capitalização composta , usa-se a fórmula

$$M = C.(1+i)^t$$

Grandezas diretamente e inversamente Proporcionais

Dizemos que duas grandezas a e b são diretamente proporcionais quando

$$b = Ka \text{ ou } \frac{b}{a} = K$$

K é chamada constante de proporcionalidade.

Dizemos que duas grandezas x e y são inversamente proporcionais quando:

$$x \cdot y = k \text{ a } y = \frac{k}{x}$$

Neste caso k é chamada constante de proporcionalidade inversa.

Expressões Numéricas

Números naturais/ números inteiros

Lembre-se que existe uma ordem para resolvermos qual quer expressão numérica. Resumidamente:

- 1) Parênteses
- 2) Colchetes
- 3) Chaves
- 4) Potência ou Radiciação
- 5) Multiplicação
- 6) Soma ou Subtração

Observe o modelo:

$$[6 + 3 \cdot (4 + 2^3) - 13^0 \cdot (40 : 8 - 3)] \div 2 - 3$$

$$[6 + 3 \cdot (4 + 8) - 1 \cdot (5 - 3)] \div 2 - 3$$

$$[6 + 3 \cdot (12) - 1 \cdot 2] \div 2 - 3$$

$$[6 + 36 - 2] \div 2 - 3$$

$$40 \div 2 - 3$$

$$20 - 3$$

$$17$$

Números Fracionários

Observe os modelos:

$$1) \frac{8}{5} - \frac{13}{5} + \frac{7}{5} = \frac{8-13+7}{5} = \frac{2}{5}$$

$$2) \frac{7}{2} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{1}{6}$$

$$\frac{7}{2} - \frac{16}{9} - \frac{1}{6} \text{ (MMC = 18)}$$

$$\frac{63 - 32 - 3}{18}$$

$$\frac{28}{18} = \frac{14}{9}$$

Frações e números decimais

Observe os modelos:

$$\frac{8}{1000} = 0,008$$

$$3,15 = \frac{315}{100}$$

$$0,4444... = \frac{4}{9}$$

$$2,48 + 36 + 0,07 + 0,003 = 38,553.$$

$$82,94 - 0,53 = 82,41$$

$$\begin{array}{r} 82,298 \overline{)0,53} \rightarrow 82,298 \overline{)0,530} \\ \underline{29 \ 29} \\ 2 \ 798 \\ \underline{1480} \\ 4200 \\ \underline{290} \end{array}$$

Sistema métrico decimal

Comprimento

Unidade Fundamental: Metro (símbolo: m).

Submúltiplos:

$$1 \text{ mm} = 1 \text{ milímetro} = 10^{-3} \text{ m}$$

$$1 \text{ cm} = 1 \text{ centímetro} = 10^{-2} \text{ m}$$

$$1 \text{ dm} = 1 \text{ decímetro} = 10^{-1} \text{ m}$$

Múltiplos:

$$1 \text{ dam} = 1 \text{ decâmetro} = 10 \text{ m}$$

$$1 \text{ hm} = 1 \text{ hectômetro} = 10^2 \text{ m}$$

$$1 \text{ km} = 1 \text{ quilômetro} = 10^3 \text{ m}$$

Volume:**UNIDADE FUNDAMENTAL: METRO CÚBICO (m³)**

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ L} = 1000 \text{ litros}$$

$$1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$$

$$1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ mL}$$

Observe o modelo:

$$0,78 \text{ m}^3 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^3$$

Lembre - se: $1 \text{ m} = 10^2 \text{ cm}$

$$1 \text{ m}^3 = (10^2 \text{ cm})^3 = 10^6 \text{ cm}^3$$

$$\text{Logo } 0,78 \text{ m}^3 = 0,78 \times 10^6 \text{ cm}^3 = 78 \times 10^4 \text{ cm}^3 = 780.000 \text{ cm}^3.$$

Frações Algébricas

Observe o modelo:

$$\frac{x-1}{3} + \frac{7}{6} = \frac{x+1}{2}$$

$$\text{MMC}(3,6,2) = 6 \Rightarrow \frac{2(x-1)+7}{6} = \frac{3(x+1)}{6}$$

$$2x - 2 + 7 = 3x + 3 \Leftrightarrow 2x - 3x = 3 - 7 + 2 \Leftrightarrow -x = -2 \Leftrightarrow x = 2.$$

6_9

Equações e Inequações

Equação do 1º Grau

Toda equação na variável x do tipo (ou redutível a) $ax + b = 0$ com $a \neq 0$ e $a, b \in \mathbb{R}$ é denominada equação polinomial do 1º grau em x .

$$\text{Se } x \neq 0, ax + b = 0 \text{ onde } x = -\frac{b}{a}$$

Ex:

$$3x - 6 = 0$$

$$3x = 6$$

$$x = \frac{6}{3}$$

$$x = 2$$

(é raiz, solução ou zero da equação; note que $x = 2$ o único valor de x que torna verdadeira a igualdade.)

Inequação do 1º Grau

Conceito de desigualdade

Os símbolos que representam desigualdades são: $\neq$, $>$, $<$ e toda sentença aberta (que possui pelo menos uma variável) onde apareça uma desigualdade é uma inequação.

Uma propriedade importante das desigualdades é:

$$a > b \Leftrightarrow -a < -b$$

Ou seja, multiplicando-se ou dividindo-se uma desigualdade por um número negativo "inverte-se o sentido" da desigualdade.

Ex:

$$3x - 5 < x + 7$$

$$3x - x < 7 + 5$$

$$2x < 12$$

$$x < 6$$



Equação do 2º Grau

Toda equação na variável x do tipo (ou redutível a) $ax^2 + bx + c = 0$ onde $a \in \mathbb{R}^*$; $b, c \in \mathbb{R}$, é denominada equação polinomial do 2º grau.

Discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Se $\Delta > 0$ temos se $\Delta x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = 0$ temos $x = \frac{-b}{2a}$ se $\Delta < 0$ não existem raízes reais.

Se x_1 e x_2 são as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, então

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Ex:

$$1x^2 - 7x + 12 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ b = -7 \\ c = 12 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c \quad \Delta = 49 - 4 \cdot 1 \cdot 12$$

$$\Delta = 49 - 48 \quad \Delta = 1$$

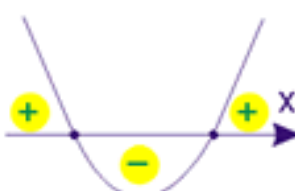
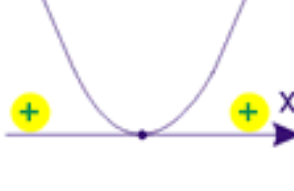
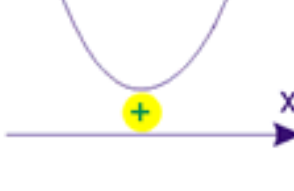
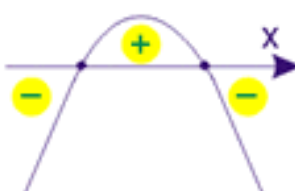
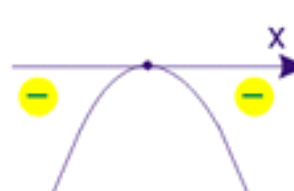
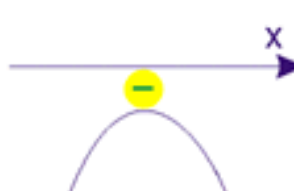
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+7 \pm 1}{2} \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

Inequação do 2º Grau

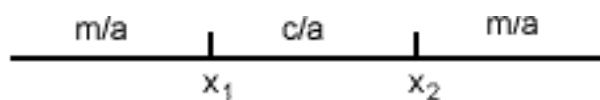
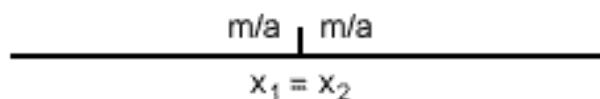
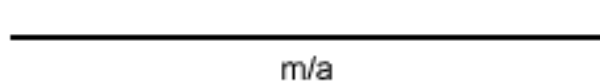
Estudo da variação dos sinais das imagens da função do 2º grau.

Seja a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

Seu gráfico é uma parábola que se comporta conforme a tabela abaixo:

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

ou:

$\Delta > 0$	
$\Delta = 0$	
$\Delta < 0$	

Ex:

$$x^2 - 5x + 6 > 0 \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \\ c = 6 \end{cases}$$

1º Cálculo das raízes

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(6) = 1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 \pm 1}{2(1)}$$

$$x_1 = 2 \text{ e } x_2 = 3$$

2º Esboço da Parábola



3º Análise do sinal

$$x^2 - 5x + 6 > 0 \text{ p/ } x < 2 \text{ ou } x > 3$$

Sistemas de equações

1º Grau:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$$

Vamos somar as duas equações; membro a membro:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$$

$$3x = 18$$

$$x = 6$$

Substituindo numa das equações: $6 + y = 8$ $y = 2$ Este é o método da Adição.

Página 7

Matérias > Matemática > Equações e Inequações

Veja agora o método da substituição:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 24 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

1º) Vamos isolar y na 2ª Equação: $y = 6 - x$ 2º) E substituir na 1ª: $x^2 - (6 - x)^2 = 24$

3º) Agora resolvendo...

$$x^2 - (36 - 12x + x^2) = 24$$

$$x^2 - 36 + 12x - x^2 = 24$$

$$12x = 60$$

$$x = 5$$

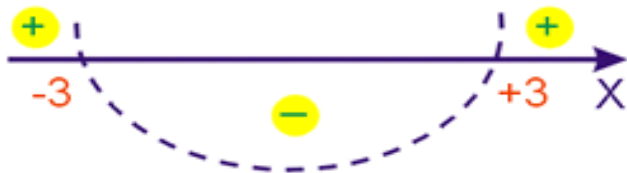
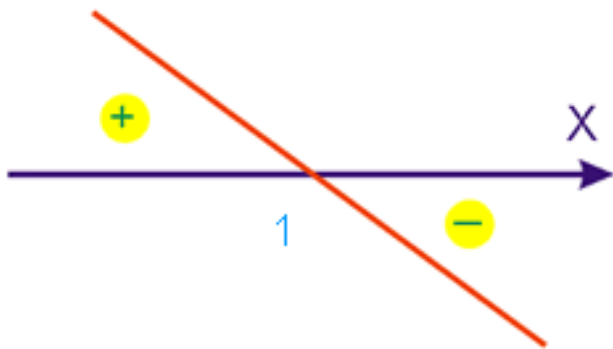
$$5 = x \rightarrow y = 6 - x \Rightarrow y = 1$$

Inequações - Produto e Quociente

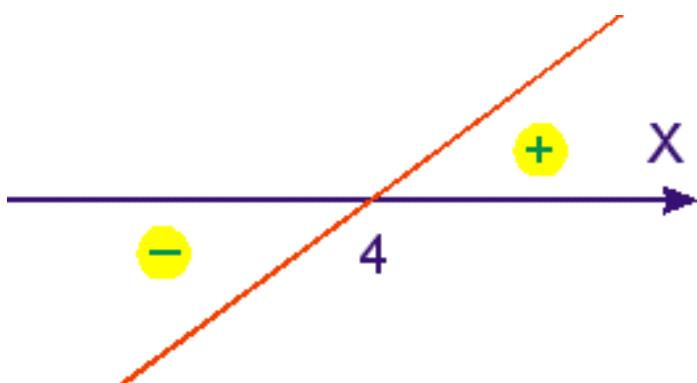
Observe o modelo:

$$\frac{(1-x) \cdot (x^2-9)}{(2x-8)} < 0$$

1) Estudando o sinal de cada fator. $1-x=0 \Leftrightarrow x=1$



$$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = -3$$



$$2x - 8 = 0$$

$$x = 4$$

2) Agora vamos colocar estes dados no quadro de sinais.

	-3	1	3	4	X
	+	+	-	-	$(1 - x)$
	+	-	-	+	$(x^2 - 9)$
	-	-	-	-	$(2x - 8)$
	-	+	-	+	Solução

3) Como foi pedido negativo:

Temos $x \in \mathbb{R} / x < -3$ ou $1 < x < 3$ ou $x > 4$

7_4

Fatoração e Produtos Notáveis

Produtos Notáveis

Quadrado da soma ou diferença:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$

$$(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$$

$$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$$

Ex:

$$(2x + 3y^2)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y^2) + (3y^2)^2 =$$

$$= 4x^2 + 12xy^2 + 9y^4$$

Página 2

Matérias > Matemática > Fatoração e Produtos Notáveis

Produto da Soma pela Diferença:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Ex:

$$x^2 - 16 = (x + 4) \cdot (x - 4)$$

$$a^4 - b^4 = (a^2)^2 - (b^2)^2 = (a^2 - b^2) \cdot (a^2 + b^2) = (a + b) \cdot (a - b) \cdot (a^2 + b^2)$$

Cubo da soma e da diferença:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Ex:

$$(x + 2)^3 = x^3 + 3(x^2)(2) + 3(x)(2)^2 + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

Página 3

Matérias > Matemática > Fatoração e Produtos Notáveis

Fatoração

Fatorar significa encontrar **fatores** que conduzam a um produto dado.

Principais casos de fatoração:

Fator comum (evidência)

$$ax + bx = x(a + b)$$

Agrupamento

$$ax + bx + ay + by = x(a+b) + y(a + b) = (a + b)(x + y)$$

Diferença de Quadrados

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Quadrados Perfeitos

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Soma de Cubos

$$(a^3 + b^3) = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Diferença de cubos

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Ex:

$$8y^3 - 125 = (2y)^3 - 5^3 = (2y - 5) \cdot (4y^2 + 10y + 25)$$

Cubos Perfeitos

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$$

Ex:

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3$$

Médias

Média Aritmética Simples

Chamamos média aritmética simples de um conjunto de valores x_i ($x_1, x_2, x_3 \dots x_n$) um número $\overline{X}$:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \text{ onde } n = \text{número total de elementos do conjunto,}$$

$$\text{ou ainda } \overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

Média Aritmética Ponderada

Chamamos média aritmética ponderada de um conjunto de valores x_i ($x_1, x_2 \dots x_n$) com pesos (ditos fatores ponderais) P_i ($P_1, P_2 \dots P_n$) um número $\overline{X_p}$:

$$X_p = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot P_i}{\sum_{i=1}^n P_i} \quad \text{ou ainda} \quad \overline{X_p} = \frac{x_1 \cdot P_1 + x_2 \cdot P_2 + \dots + x_n \cdot P_n}{P_1 + P_2 + P_3 \dots P_n}$$

Média Geométrica

Chamamos média geométrica de um conjunto de valores x_i ($x_1, x_2, \dots x_n$) a raiz enésima do produto dos n valores: Observação positivas ou nulas:

$$MG = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \text{ onde } x_i \geq 0$$

Ex:

A média geométrica entre 4 e 9 é:

$$MG = \sqrt[2]{4 \cdot 9} = \sqrt[2]{36} = 6$$

Média Harmônica

Chamamos média harmônica de um conjunto de valores x_i ($x_1, x_2, \dots x_n$) o inverso da média aritmética dos inversos dos valores.

$$MH = \frac{1}{\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}{n}} \quad (x_i \neq 0)$$

Ex:

Calcular a média harmônica entre os números (2, 3, 6).

$$MH = \frac{1}{\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}}{3}} = \frac{1 \times 3}{\frac{3+2+1}{6}} = \frac{3}{\frac{6}{6}} = \frac{3}{1} = 3$$

9_4

Potenciação e Radiciação

Dado um número $a \in \mathbb{R}$ e um número $n > 1$ define-se potência enésima de a como:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fatores.}}$$

Ex: $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

Obs. $a^0 = 1$ para qualquer a .

$$a^1 = a$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Dado $a \geq 0$ e um número $n \in \mathbb{N}$ temos que a raiz enésima de a é definida como:

$$\sqrt[n]{a} = b \Rightarrow b^n = a \text{ e } b \geq 0 \text{ e } b \in \mathbb{R}$$

Ex:

$$\sqrt[4]{16} = 2 \text{ pois } 2^4 = 16$$

$$\sqrt[3]{125} = 5 \text{ pois } 5^3 = 125$$

Equações e Inequações exponenciais

Seja $a > 0$ e $a \neq 1$ temos $a^x = a^b \Leftrightarrow x = b$

Ex:

$$2^x = 2^6 \Leftrightarrow x = 6$$

$$3^{2x-3} = 3^7 \Leftrightarrow 2x-3 = 7 \Leftrightarrow 2x = 10 \Leftrightarrow x = 5$$

Inequações Exponenciais

$$a > 1 \text{ e } 0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$$

Ex:

$$3^4 < 3^7$$

$$0 < a < 1 \text{ e } x^1 < x^2 \Leftrightarrow a^{x^1} > a^{x^2}$$

$$5^x > 5^y \Leftrightarrow x > y$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x \geq \left(\frac{3}{4}\right)^8 \Leftrightarrow x \leq 8$$

Racionalização

Significa eliminar todos os radicais que existem no denominador da fração, sem alterar o seu valor.

Obs. $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ (Racional)

Ex:

$$\frac{3}{\sqrt[5]{8}} = \frac{3}{\sqrt[5]{2^3}} = \frac{3}{\sqrt[5]{2^3}} \cdot \frac{\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^2}} = \frac{3\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{3\sqrt[5]{2^2}}{2}$$

Redução de Radicais ao mesmo índice

Trata-se de uma situação, onde necessitamos transformar os radicais de índices diferentes em radicais equivalentes com índices iguais.

Ex: $\sqrt[3]{2}$ e $\sqrt[2]{3}$ temos MMC (3,2) = 6

Assim:

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^2} \text{ e } \sqrt[2]{3} = \sqrt[6]{3^2}$$

Ex:

1) Reduzir ao mesmo índice

$$\sqrt[3]{5}, \sqrt[4]{5}, \sqrt[2]{3} \quad \text{Resp.} \quad \sqrt[12]{5^4}, \sqrt[12]{5^3}, \sqrt[12]{3^6}$$

2) Escrever em ordem crescente os números

$$\sqrt[3]{5}, \sqrt[2]{2}, \sqrt[3]{9} \quad \text{Resp.} \quad \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{9}$$

3) Escrever em ordem decrescente os números

$$\sqrt[4]{5}, \sqrt[2]{2}, \sqrt[3]{3}$$

$$\text{Resp. } \sqrt[4]{5}, \sqrt[3]{3}, \sqrt{2}$$

4) Calcular

$$\sqrt[4]{2}, \sqrt{3}$$

$$\text{Resp. } \sqrt[4]{18}$$

5) Calcular

$$\frac{\sqrt[2]{3}}{\sqrt[3]{3}}$$

$$\text{Resp. } \sqrt[6]{3}$$

Notação Científica

Temos todo número racional não nulo pode ser escrito na forma $x \cdot 10^y$ onde $1 \leq x < 10$ e y é inteiro.

Ex:

$$3000 = 3 \cdot 1000 = 3 \times 10^3$$

$$0,00037 = \frac{37}{10^5} = 37 \times 10^{-5} = 3,7 \times 10^{-4}$$

Isto nos facilita muito um trabalho onde hajam operações com números de muitos dígitos.

$$\text{Assim } \frac{(0,001)^2 \cdot 100^2}{0,1} \text{ ficaria } \frac{(10^{-3})^2 \cdot (10^2)^2}{10^{-1}} = \frac{10^{-6} \cdot 10^4}{10^{-1}} = \frac{10^{-2}}{10^{-1}} = 10^{-1} = 0,1$$

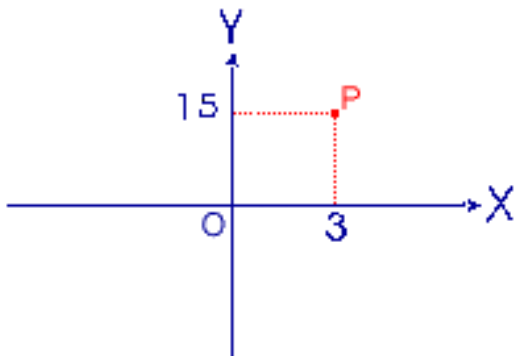
Relações e Funções

Par ordenado

É um par de elementos $(x ; y)$ onde a ordem é importante, de modo que o par ordenado $(x ; y)$ é considerado diferente do par ordenado $(y ; x)$.

Plano Cartesiano

Sobre um plano, podemos adotar dois eixos perpendiculares OX e OY, de origem comum O, de modo que a cada ponto do plano podemos associar um par ordenado de números reais. Por exemplo, na figura abaixo, o ponto P pode ser representado pelo par ordenado $(3 ; 15)$ onde 3 é a abscissa e 15 é a ordenada do ponto:

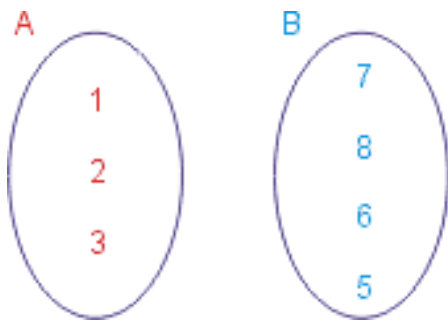


Relação

Dados dois conjuntos A e B, uma **relação de A em B** é um conjunto de pares ordenados $(x ; y)$ onde $x \in A$ e $y \in B$.

Ex:

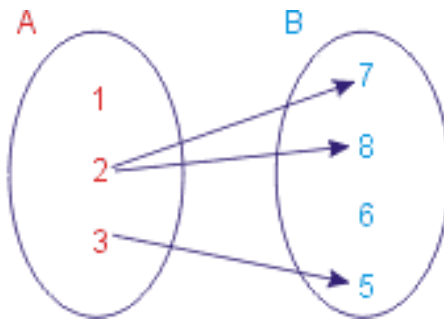
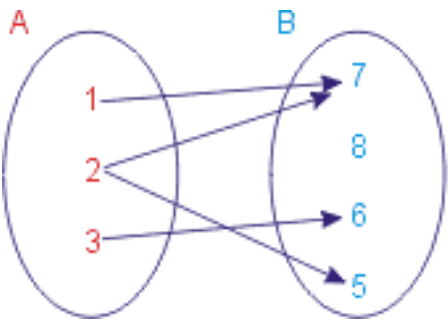
Considerando os conjuntos A e B abaixo podemos considerar as seguintes relações de A em B:



$$R1 = \{ (1 ; 7) ; (2 ; 5) ; (2 ; 7) ; (3 ; 6) \}$$

$$R2 = \{ (2 ; 7) ; (2 ; 8) ; (3 ; 5) \}$$

Uma relação pode ser representada por um diagrama de flechas. Para as relações de exemplo acima podemos fazer os seguintes diagramas:



As flechas unem o primeiro ao segundo elemento de cada par ordenado.

O segundo elemento do par ordenado é chamado de **imagem** do primeiro. Assim, em relação ao par ordenado (1 ; 7), pertencente à relação R1, dizemos que **7 é imagem de 1**.

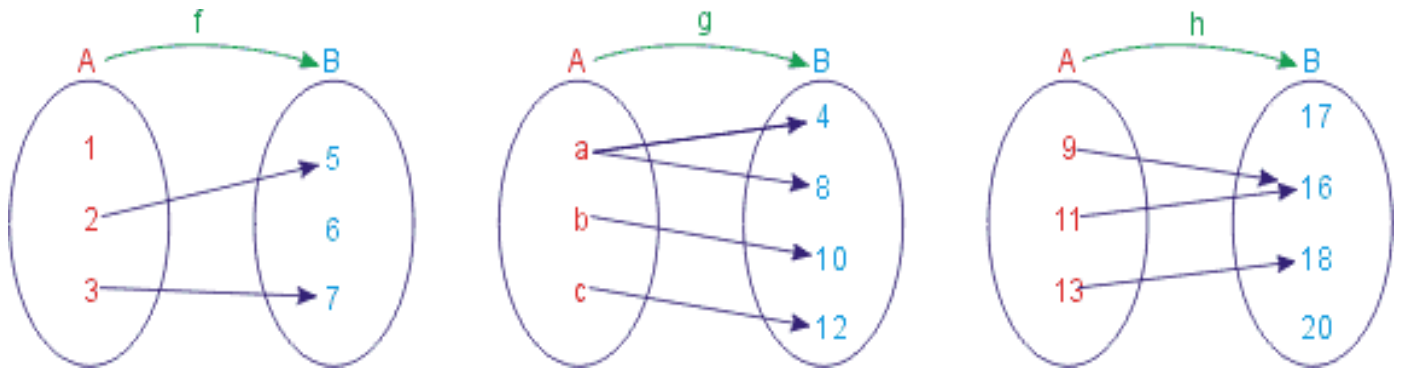
Função

Uma relação f de A em B é chamada de função de A em B se, e somente se forem satisfeitas as condições:

- 1ª) Todos os elementos de A possuem imagem;
- 2ª) Cada elemento de A tem uma única imagem.

Ex:

Consideremos as relações f , g e h representadas pelos diagramas de flechas:



A relação de **f não é função** pois o número 1 (pertencente a A) não possui imagem.

A relação **g não é função** pois o elemento **a** possui duas imagens: 4 e 8.

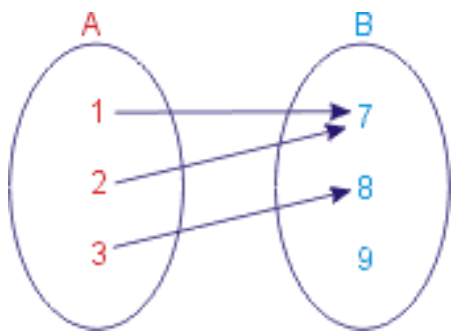
A relação **h** é uma função de A em B pois cada elemento de A possui uma **única** imagem. Observe que no conjunto B pode haver elementos que não são imagens (17 e 20). Observe também que podemos ter dois elementos com a mesma imagem (9 e 11).

Página 4

Matérias > Matemática > Relações e Funções

Domínio e Conjunto Imagem

Dada uma função de A em B, o conjunto A é chamado **domínio** ($D(f)$) da função. O conjunto de todas as imagens é chamado **conjunto imagem** ($I(f)$) da função. Por exemplo, para a função f esquematizada a seguir temos:



$$A = D(f) = \text{domínio de } f = \{1; 2; 3\}$$

$$I(f) = \text{conjunto imagem de } f = \{7; 8\}$$

TIPOS DE FUNÇÃO

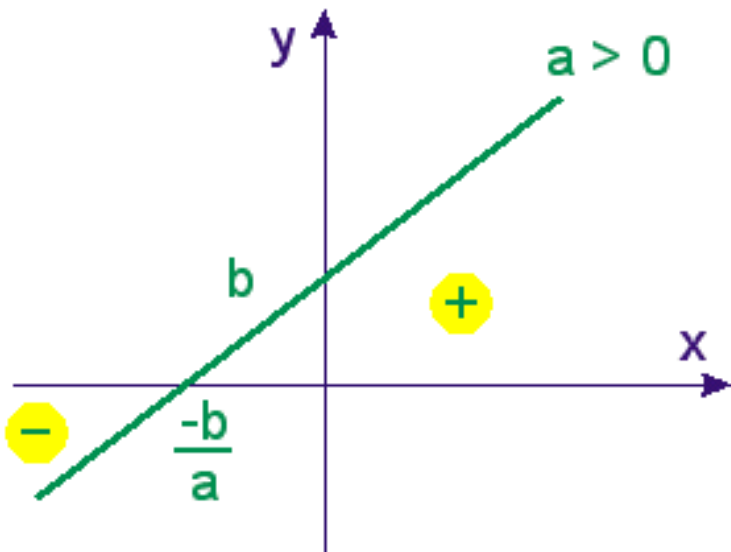
Função do 1º grau

É a função $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ tal que $y = ax + b$

$D = \mathbb{R}$

$CD = Im = \mathbb{R}$

Gráfico:



Raiz: $y = ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$

Ex: $y = 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

Função do 2º Grau

É a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que
 $y = ax^2 + bx + c$ (onde $a \neq 0$)

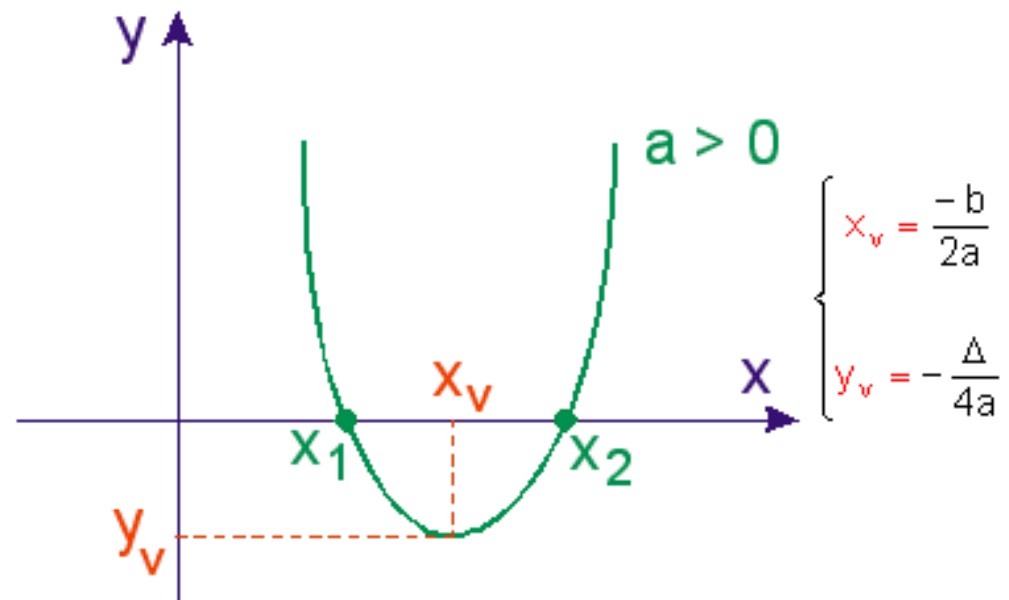
$$D = \mathbb{R} ; CD = \mathbb{R}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow 2 \text{ Raízes}$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow 1 \text{ Raiz}$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow \text{2 Raiz real}$$



x_1 e x_2 são as raízes.

$$\text{se } a > 0, \text{ Im} = \left\{ y \in \mathbb{R} / y \geq \frac{-\Delta}{4a} \right\}$$

$$\text{se } a < 0 \text{ Im} = \left\{ y \in \mathbb{R} / y \leq \frac{-\Delta}{4a} \right\}$$

Função modular

Módulo de um número real

Definição:

$$\text{se } x \geq 0 : |x| = x$$

$$\text{se } x \leq 0 : |x| = -x$$

Propriedades:

$$\text{I } |x| \geq 0$$

$$\text{II } |x| = |-x|$$

$$\text{III } |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$\text{IV } \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$$

$$\text{V } |x + y| \leq |x| + |y|$$

$$\text{VI } |x - y| \geq |x| - |y|$$

Ex:

$$|2x + 1| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0 \\ \text{ou} \\ 2x + 1 = -1 \Leftrightarrow x = -1 \end{cases}$$

$$\text{Se } A > 0, |x| > A \Leftrightarrow x < -A \text{ ou } x > A$$



$$\text{Se } A > 0, |x| < A \Leftrightarrow -A < x < A$$



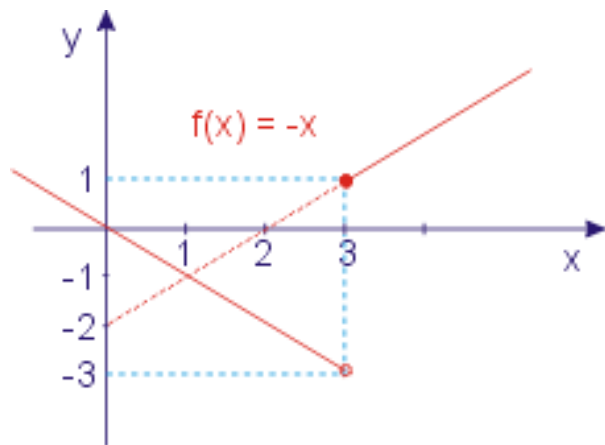
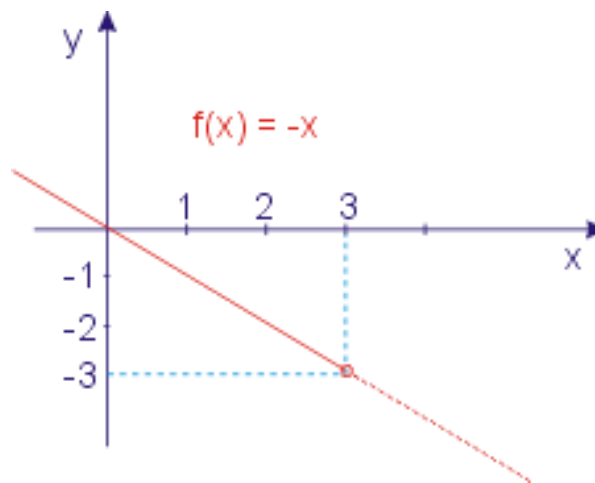
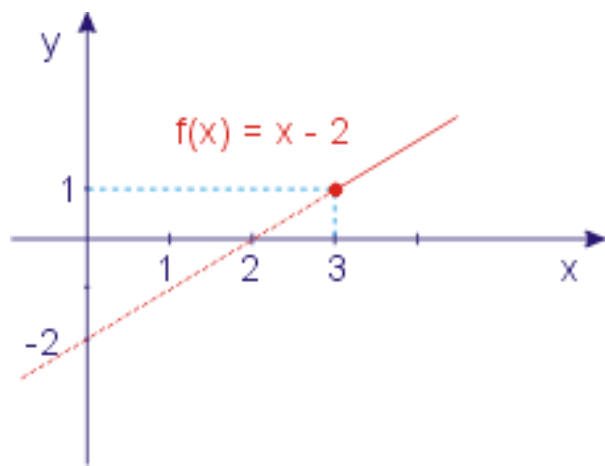
Ex:

$$|x - 1| \leq 2 \Leftrightarrow -2 < x - 1 < 2 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$$

Funções definida por várias sentenças

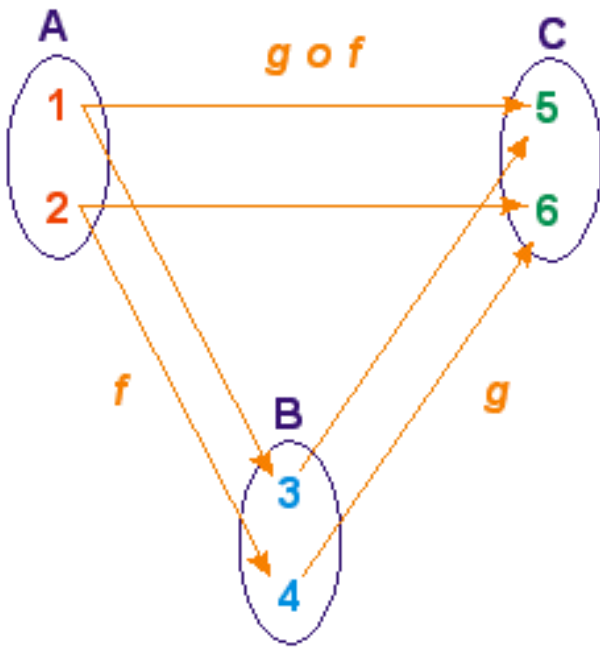
Veja o modelo:

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x \geq 3 \\ -x & \text{se } x < 3 \end{cases}$$



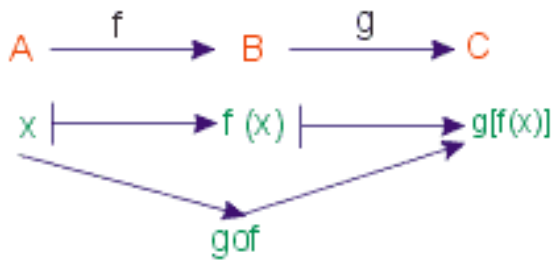
Função composta

Dadas duas funções, f e g , podemos obter uma outra função, que se representa por $g \circ f$ e se chama função composta de g com f .



A imagem de um elemento qualquer x de A por meio da função composta $g \circ f$ é determinada em duas etapas:

- a primeira transforma o elemento x de A no elemento $f(x)$ de B
- a seguinte transforma o elemento $f(x)$ de B no elemento $g[f(x)]$ de C



A função composta faz sozinha o que f e g fazem juntas.

Ex: $F(x) = 2x + 1$
 $G(x) = 3x - 5$

$$(F \circ G)(x) = 2 \cdot (3x - 5) + 1 = 6x - 10 + 1 = 6x - 9$$

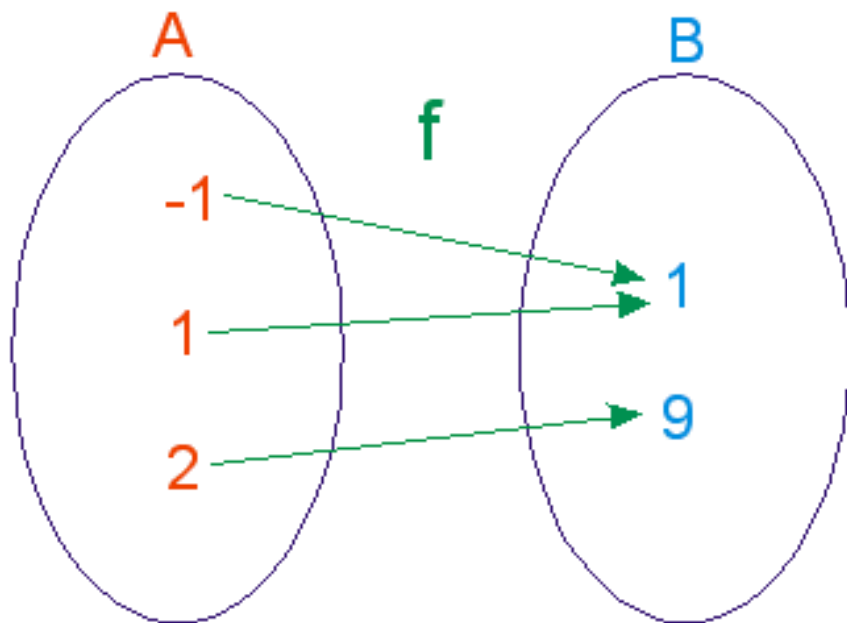
$$(G \circ F)(x) = 3 \cdot (2x + 1) - 5 = 6x + 3 - 5 = 6x - 2$$

Classificação das funções

Função Sobrejetora

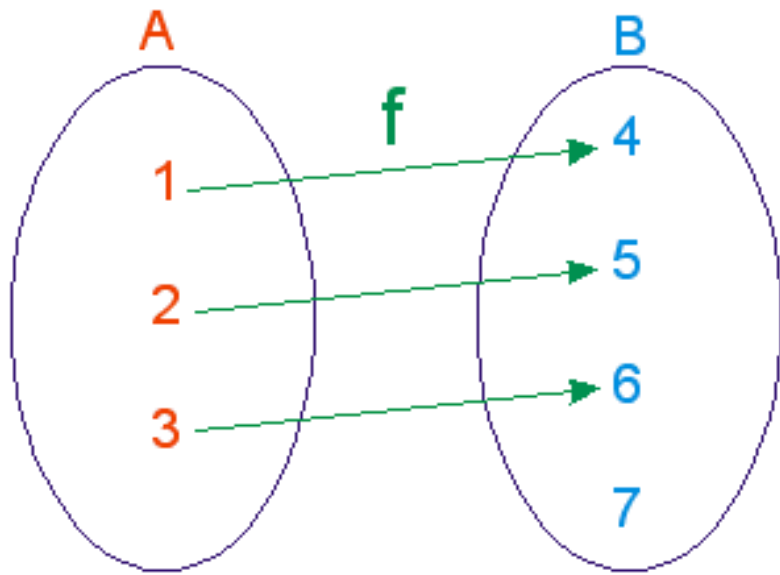
Dizemos que uma função f de A em B é sobrejetora quando o conjunto imagem for igual ao contradomínio da função.

$$I = CD = \{ 1, 9 \}$$



Função Injetora

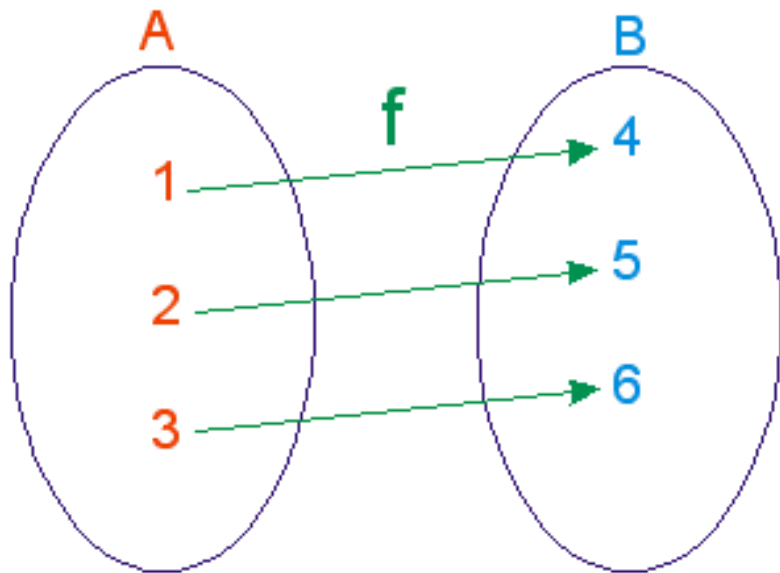
Dizemos que uma função f de A em B é injetora se quaisquer dois elementos diferentes do seu domínio têm imagens diferentes.



$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Função Bijetora

É toda função f de A em B que é simultaneamente injetora e sobrejetora.



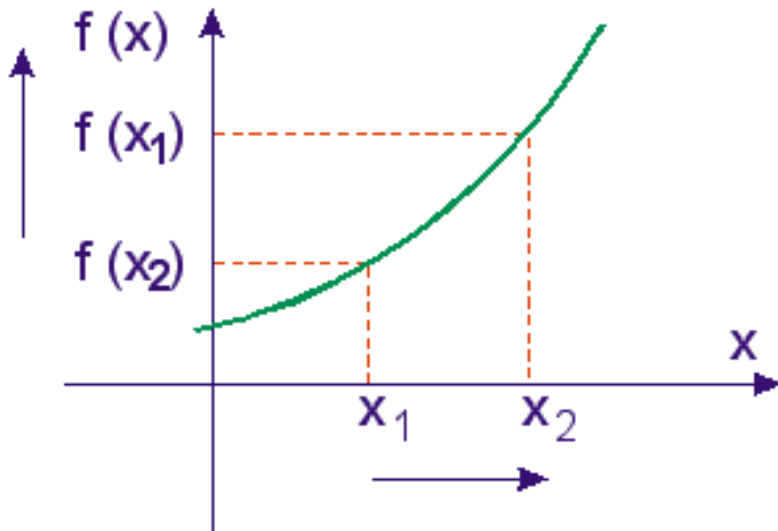
Função Crescente e Decrescente

a) Função crescente :

Se $A \subset D$

f é crescente em $A \Leftrightarrow [x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1), \forall x_1, x_2 \in A]$

Isto é, a um maior valor de x corresponde um maior valor de $f(x)$.



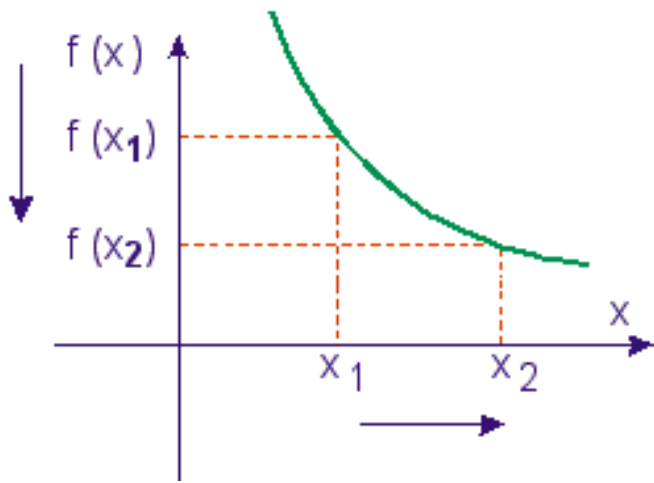
Página 9

Matérias > Matemática > Tipos de Função

b) Função Decrescente :

Se $A \subset D$

f é decrescente em $A \Leftrightarrow [x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1), x_1, x_2 \in A]$



Função Par

Dizemos que uma função $f : A \rightarrow B$ é par se, e somente se,

$$\forall x \in A, f(-x) = f(x)$$

O gráfico de uma função par é simétrico com relação ao eixo das ordenadas.

Função Ímpar

Dizemos que uma função $f : A \rightarrow B$ é ímpar se, e somente se,

$$\forall x \in A \rightarrow f(-x) = -f(x)$$

O gráfico de uma função ímpar é simétrico com relação à origem do sistema cartesiano

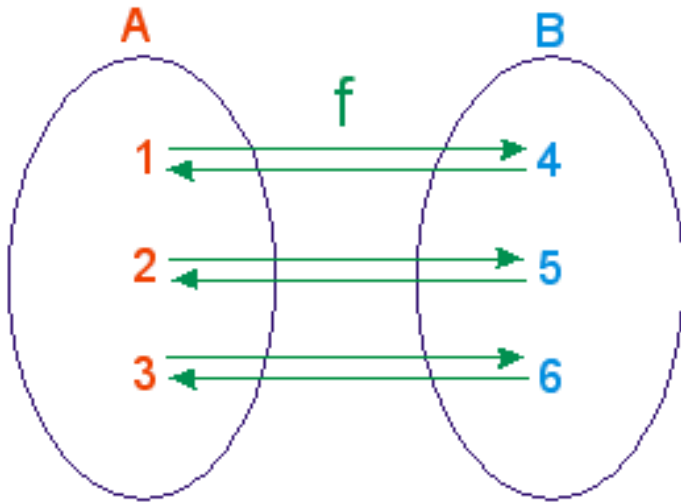
Ex:

$F(x) = \sin x$ é ímpar pois $\sin(-x) = -\sin x$.

$F(x) = \cos x$ é par pois $\cos(-x) = \cos x$

Função inversa

Denomina-se função inversa da função bijetora $f : A \rightarrow B$ a função $f^{-1} : B \rightarrow A$ que se obtém trocando de posição os elementos de todos os pares ordenados da função f .



$$f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\} \quad f^{-1} = \{(4, 1), (5, 2), (6, 3)\}$$

Observação.

Para se obter a inversa de uma função, devemos proceder da seguinte forma:

- isola-se o x
- troca-se x por y e y por x

Exemplo:

Dar a inversa da função:

$$y = \frac{2x - 3}{5x + 1}, \quad x \neq -\frac{1}{5}$$

Resolução:

$$(5x + 1)y = 2x - 3$$

$$5xy + y = 2x - 3$$

$$5xy - 2x = -y - 3$$

$$x(5y - 2) = -y - 3$$

$$x = \frac{-y - 3}{5y - 2} = \frac{y + 3}{2 - 5y}$$

$$\text{Assim: } y^{-1} = \frac{x + 3}{2 - 5x}$$

Função Exponencial e Logarítmica

Definição

O logaritmo de "a" na base "b" é o expoente "c" que devemos dar a "b" para que este fique igual ao número "a". Nestas condições dizemos:

$$\log_b a = c \Rightarrow b^c = a$$

$$b > 0$$

$$b \neq 1$$

$$a > 0$$

Ex:

$$\log_2 64 = 6 \text{ pois } 2^6 = 64$$

Obs.

I - Em $\log_{x-3}(9-x)$ as condições de existência devem ser:

$$9 - x > 0 \Leftrightarrow x < 9$$

$$x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$$

$$x - 3 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 4$$

II - Quando não se menciona a base, esta é o número 10.

Ex:

$$\log 85 = \log_{10} 85$$

Característica e Mantissa

Em $\log x = c + m$, onde $c \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq m < 1$ é denominado característica, e m mantissa vem do latim, significando excesso.

Ex:

$$\log 2 = 0,301 \text{ onde } c = 0 \text{ e } m = 0,301$$

$$\log 20 = 1,301 \text{ onde } c = 1 \text{ e } m = 0,301.$$

$$\log 200 = 2,301 \text{ onde } c = 2 \text{ e } m = 0,301.$$

Assim, se $x \geq 1$, a característica é a quantidade de algarismos da parte inteira de x , menos 1.

$$\log 0,2 = -1 + 0,301 = \overline{1},301 \quad \text{onde } c = -1 \text{ e } m = 0,301.$$

$$\log 0,02 = -2 + 0,301 = \overline{2},301 \quad \text{onde } c = -2 \text{ e } m = 0,301.$$

Assim, se $0 < x < 1$, a característica é a quantidade de zeros que precedem o primeiro algarismo não-nulo, aferida de sinal negativo.

Equações e Inequações Logarítmicas

São casos onde nós temos que reduzir as equações que estão envolvendo logaritmos e exponenciais a expressões do tipo:

$$a = b \quad , \quad \log_a b = x \quad , \quad d^x < d^y \quad \text{ou} \quad \log_a b < y$$

Assim vejamos:

$$3^{2x} = 81 \cdot 3^{x+2}$$

$$3^{2x} = 3^4 \cdot 3^{x+2}$$

$$3^{2x} = 3^{4+x+2}$$

$$3^{2x} = 3^{x+6} \quad \Leftrightarrow \quad 2x = x + 6$$

$$x = 6$$

Ex:

$$(\log_2^x)^2 = 2 \log_2^x$$

$$(\log_2^x)(\log_2^x) - 2 \log_2^x = 0$$

$$\log_2^x (\log_2^x - 2) = 0$$

$$\log_2^x = 0 \quad \text{ou} \quad \log_2^x = 2$$

$$x = 2^0 = 1 \quad \text{ou} \quad x = 2^2 = 4$$

Função Logarítmica

Função logarítmica é uma função definida em $\mathbb{R}_+^*$ com imagem, $F(x) = \log_a^x$, onde $a \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1$.

Se $a > 1$, a função será estritamente crescente, e portanto, uma desigualdade entre os dois elementos do domínio, conservará o seu sentido entre os elementos correspondentes do conjunto imagem. Caso contrário, ou seja, se $0 < a < 1$, f será estritamente decrescente, e portanto inverterá o sentido da desigualdade.

Progressões Aritméticas e Geométricas

Sequência

É uma expressão do termo geral a_n em função de n (índice do termo da sequência).

A formula de recorrência fornece o 1º termo e expressa um termo qualquer a_{n+1} , em função do seu antecedente a_n .

Ex:

$$a_1 = 3$$

$$a_n = 2 + a_{n+1} \Rightarrow \{3, 5, 7, 9 \dots\}$$

Progressão Aritmética

Definição

É uma sequência onde somando uma constante r (denominada razão) a cada termo, obtem – se o termo seguinte.

Assim:

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r$$

$$a_4 = a_3 + r = a_1 + 3r$$

·
·
·
·

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r, \text{ que é conhecida como a Fórmula do Termo Geral.}$$

Propriedades

(1ª) Cada termo, a partir do segundo, é média aritmética entre o termo que o precede e o termo que o sucede.

(2ª) A soma de dois termos equidistante dos extremos é igual a soma dos extremos.

A partir desta propriedade demonstra-se que a soma dos termos de uma P.A. é dada por:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$\text{PA de termos} \begin{cases} 1^\circ x - m \\ 2^\circ x \\ 3^\circ x + m \end{cases} \quad \text{onde } m = \text{razão}$$

Interpolação Aritmética

$$r = \frac{C - A}{k + 1} \quad \text{A e C são os extremos da PA e k é o número de termos a ser interpolado.}$$

Definição

É uma sequência onde multiplicando cada termo por uma constante q (denominada razão), obtém-se o termo seguinte.

Assim:

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3$$

·
·
·

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \text{ que é a Fórmula do Termo Geral.}$$

Propriedades

(1ª) Cada termo, a partir do segundo, é média geométrica entre o termo que o precede e o termo que o

sucede.

(2ª) O produto de dois termos eqüidistante dos extremos é igual ao produto dos extremos.

A partir desta propriedade demonstra-se que o produto dos termos de uma P.G. é dado por:

$$|P_n| = \sqrt[n]{(a_1 \cdot a_n)^n} \text{ ou } P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

(3ª) A soma dos termos de uma P.G. é dada por $S = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$ com $q \neq 1$.

Se $q = 1$ então $s_n = n \cdot a_1$

(4ª) Se $-1 < q < 1$

e n tende a infinito, a_n tende a zero, e S_n a um número S chamado limite da soma obtido por $S = \frac{a_1}{1 - q}$.

$$\text{P.G. de termos} \begin{cases} 1^\circ & x/q \\ 2^\circ & x \\ 3^\circ & x \cdot q \end{cases} \text{ onde } q = \text{razão da P.G.}$$

Interpolação geométrica

$$q = \sqrt[k+1]{\frac{B}{A}}$$

onde B e A são os extremos da PG,

K = número de termos que se deseja interpolar.

NÚMEROS COMPLEXOS

Definição

Forma algébrica de um número complexo é $Z = a + bi$, onde $i = \sqrt{-1}$

$a, b \in \mathbb{R}$, e i é uma unidade imaginária.

O número i tem potências periódicas:

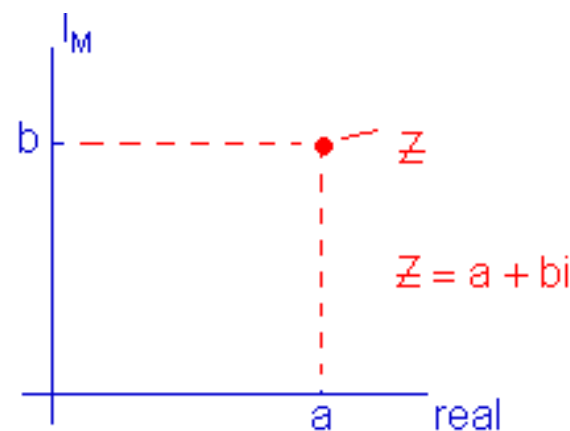
$$\begin{array}{llll} \dots & i^0 = 1 & , & i^4 = 1 & \dots & i^{4k} = 1 \\ \dots & i^1 = i & , & i^5 = i & \dots & i^{4k+1} = i \\ \dots & i^2 = -1 & , & i^6 = -1 & \dots & i^{4k+2} = -1 \\ \dots & i^3 = -i & \dots & i^7 = -i & \dots & i^{4k+3} = -i \end{array}$$

onde $k \in \mathbb{Z}$.

Desta forma para obtermos uma potência de i basta dividir o expoente por 4, e calcular i elevado ao resto da divisão.

As quatro operações são realizadas entre números complexos na forma algébrica, operando os termos onde aparece i (ditos parte imaginária) algebricamente, e da mesma forma com as partes reais. Único destaque, para a divisão que deverá ser feita multiplicando dividendo e divisor, pelo complexo conjugado do divisor.

Chama-se complexo conjugado de $Z = a + bi$ ao complexo $\bar{Z} = a - bi$.



Ex:

$$i^{124} = ? \quad \begin{array}{r} 124 \overline{) 4} \\ 04 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\text{Logo } i^{124} = i^0$$

Página 3

Matérias > Matemática > Números Complexos

Operações com Números Complexos

Adição/Subtração:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Multiplicação

$$(a + bi) - (c - di) = (a - c) + (b - d)i$$

Divisão

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{(bc - ad)}{c^2 + d^2}i$$

Ex:

$$z_1 = 3 + 5i$$

$$z_2 = 2 + li$$

$$z_1 + z_2 = 5 + 6i$$

$$z_1 - z_2 = 1 + 4i$$

$$z_1 \cdot z_2 = 6 + 3i + 10i - 5 = 1 + 13i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 5i}{2 + i} \cdot \frac{(2 - i)}{(2 - i)} = \frac{6 - 3i + 10i - 5i^2}{4 - (i^2)} = \frac{6 - 3i + 10i + 5}{4 + 1} = \frac{11}{5} + \frac{7i}{5}$$

Propriedades

De um Número Complexo $z = a + bi$

$$P1: Z + \bar{Z} = 2 \operatorname{Re}(Z)$$

$$P2: \overline{Z_1 + Z_2} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$$

$$P3: \overline{\overline{Z_1 + Z_2}} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$$

$$P4: (\bar{Z})^n = \overline{Z^n}$$

$$P5: |Z| \geq 0 \text{ onde } |Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$P6: Z \cdot \bar{Z} = |Z|^2$$

$$P7: |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$P8: |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Forma Trigonométrica de um Número Complexo

Seja um n° complexo $z = a + bi$

Define-se:

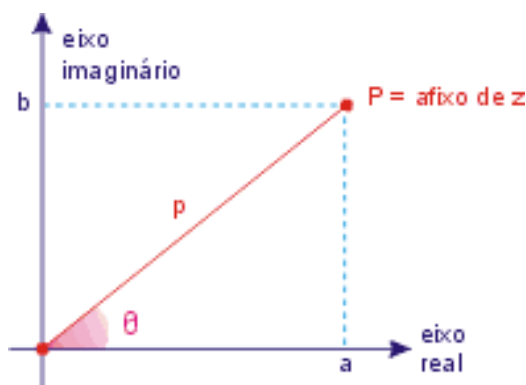
(1°) Módulo de z : $|z| = p = \sqrt{a^2 + b^2}$

(2°) Argumento de z : é um ângulo θ , onde $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$, tal que
$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{p} \\ \operatorname{sen} \theta = \frac{b}{p} \end{cases}$$

(3°) Forma geométrica de z :

$$z = p(\cos \theta + \operatorname{sen} \theta)$$

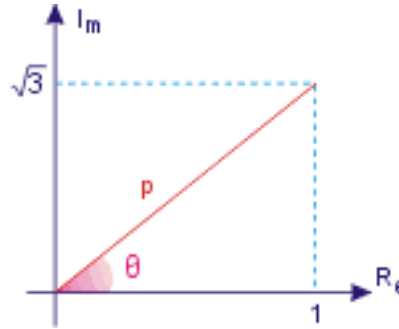
(4°) Plano de Argand – Gauss.



Exemplo:

$z = 1 + \sqrt{3}i$ Passa z para a forma trigonométrica:

$$\begin{aligned} z = a + bi &\rightarrow z = 1 + \sqrt{3}i \rightarrow p^2 = a^2 + b^2 \\ p^2 &= 1^2 + (\sqrt{3})^2 \\ p^2 &= 1 + 3 = 4 \\ p &= 2 \end{aligned}$$



$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{a}{p} = \frac{1}{2} \\ \sin \theta &= \frac{b}{p} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \theta = 60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad. Assim: } z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

Fórmulas "De Moivre"

Dados:

$$\begin{cases} z = p(\cos \theta + i \sin \theta) \\ z_1 = p_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \\ z_2 = p_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \end{cases}$$

Aplicando trigonometria demonstra-se que:

$$(1^\circ) z_1 \cdot z_2 = p_1 p_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$(2^\circ) z_1 : z_2 = p_1/p_2 [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

$$(3^\circ) z^n = p^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$$

Conhecida como 1ª fórmula de "De Moivre".

(4º) Raízes n – ésimas:

$$\sqrt[n]{p} \left[\cos \left(\frac{\theta}{n} + \frac{360^\circ}{n} k \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{n} + \frac{360^\circ}{n} k \right) \right]$$

onde $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$, conhecida como 2ª fórmula de "De Moivre".

Exemplo:

Resolver em $\mathbb{C}$:

$$x^2 + 9 = 0$$

Seja $x = a + bi$ um número complexo que seja a solução da equação.

Assim:

$$(a + bi)^2 + 9 = 0$$

$$a^2 + 2abi - b^2 = -9 + 0i$$

$$\text{Assim} \begin{cases} a^2 - b^2 = -9 \\ 2ab = 0 \Rightarrow a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0 \end{cases}$$

Substituindo na 1ª:

$$a = 0 \Rightarrow -b^2 = -9 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow b = \pm 3$$

$$z = +3i \quad \text{ou} \quad z = -3i$$

$$b = 0 \Rightarrow a^2 = -9 \Rightarrow a = \pm 3i \text{ que forneça mesma solução.}$$

$$z_1 = +3i$$

$$z_2 = -3i$$

Análise Combinatória

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

Se um evento ocorre em "n" etapas sucessivas e independentes de tal maneira que:

a_1 seja o nº de possibilidades de ocorrência da 1ª etapa, a_2 seja o nº de possibilidades de ocorrência da 2ª etapa, ...

a_n seja o nº de possibilidades de ocorrência da nª etapa.

Então, o número total de possibilidades de ocorrência desse evento é dado por: $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n$

PERMUTAÇÕES

São grupos que diferem entre si por alterações de ordem em seus elementos.

Permutações Simples (sem elementos repetidos)

$$P_n = n!$$

Obs.

$$n! = n (n-1) (n-2) \dots 1,$$

$$\begin{cases} n \in \mathbb{N} (n \geq 2) \\ 0! = 1! = 1 \end{cases}$$

Permutações com Elementos Repetidos

$$P_n^{\alpha, \beta, \dots} = \frac{n!}{\alpha! \beta! \dots}$$

ARRANJOS

São grupos que diferem entre si por alterações de ordem e natureza em seus elementos.

Arranjos Simples (sem repetições)

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Arranjos Completos (com repetições)

$$A_{n,p}^R = N^P$$

Obs. Problemas envolvidos com número de arranjos podem ser resolvidos por aplicação do princípio multiplicativo.

COMBINAÇÕES SIMPLES

São grupos que diferem entre si por alteração de **natureza** em seus elementos.

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

16_5

Página 1

Matérias > Matemática > Binômio de Newton

BINÔMIO DE NEWTON

Fatorial

Sendo um número natural, o fatorial de n, indicado por n! é definido por:

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n(n-1)(n-2) \dots 1 \quad (\text{para } n \geq 1) \end{cases}$$

Exemplo:

$$\begin{cases} 4! = (4)(3)(2)(1) = 24 \\ 5! = (5)(4)(3)(2)(1) = 120 \end{cases}$$

Número Binomial

$$\binom{n}{p} = C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)! p!}$$

Exemplo:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2!} = 10$$

Página 2

Matérias > Matemática > Binômio de Newton

Propriedades

$$\text{I) } \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Exemplo:

$$\binom{9}{6} = \binom{9}{3} \text{ (são ditos complementares)}$$

$$\text{II) } \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} \dots \binom{n}{n} = 2^n$$

Exemplo:

$$\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 2^5 = 32$$

Página 3

Matérias > Matemática > Binômio de Newton

Relação entre Números Binomiais

Relação de Stifel:

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} \quad n \geq 2$$

Exemplo:

$$\binom{7}{3} + \binom{7}{4} = \binom{8}{4}$$

Triângulo de Pascal: (ou tartaglia)

É uma tabela onde podemos dispor ordenadamente os coeficientes dos números binomiais.

$$\begin{array}{c}
 \binom{0}{0} \\
 \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
 \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
 \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
 \binom{n}{0} \binom{n}{1} \dots \dots \dots \binom{n}{0} \binom{n}{1}
 \end{array}$$

Substituído pelos seu valores, obtemos

			1			
		1		1		
	1		2		1	
	1	3		3	1	
	1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1	

Na construção do Triângulo de Pascal não é necessário calcular os coeficientes binomiais um a um, basta usarmos algumas de suas propriedades que darei a seguir:

Em cada linha o primeiro e o último são iguais a 1.

A partir da 3ª linha, cada elementos (com exceção do 1º e do último) é a soma dos dois elementos da linha anterior, imediatamente acima dele.

Desenvolvimento do Binômio de Newton

Binômio de Newton

$$(x + a)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \cdot (x)^{n-p} \cdot (a)^p$$

Exemplo:

$$(x + 2)^4 = C_{4,0} \cdot x^4 \cdot 2^0 + C_{4,1} \cdot x^3 \cdot 2^1 + C_{4,2} \cdot x^2 \cdot 2^2 + C_{4,3} \cdot x^1 \cdot 2^3 + C_{4,4} \cdot x^0 \cdot 2^4 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$$

Fórmula do Termo Geral do Binômio de Newton

Seja o Binômio $(X + A)^n$:

A fórmula do termo geral é dada por:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} \cdot x^{n-p} \cdot A^p$$

Exemplo:

Calcular o 6º termo do desenvolvimento de $(x + y)^{15}$:

$$T_6 = T_{5+1} = \binom{15}{5} x^{15-5} \cdot y^5 = C_{15,5} \cdot x^{10} \cdot y^5$$

17_3

Página 1

Matérias > Matemática > Probabilidade

PROBABILIDADES**Experimento Aleatório**

Experimento aleatório é qualquer experiência ou ensaio cujo resultado é improvável dependendo exclusivamente do acaso.

Exemplo:

Lançar um dado e observar o número da face voltada para cima.

Injetar uma dose de insulina em uma pessoa e observar a quantidade de açúcar que diminuiu.

Espaço Amostral

Chama-se espaço amostral ao conjunto formado por todos os resultados possíveis na realização de um experimento aleatório qualquer.

Evento

Evento é qualquer subconjunto do espaço amostral.

Exemplo:

Ocorrer cara no lançamento de uma moeda.

Página 2

Matérias > Matemática > Probabilidade

Definição

Chama-se probabilidade do evento A e indica-se $P(A)$ ao quociente : $P(A) = \frac{n(A)}{n(W)}$

onde $n(A)$ é o número de possibilidades de ocorrência do evento A e $n(W)$ é o número de elementos do conjunto W (espaço amostral).

Exemplo:

No lançamento de um dado qual é a probabilidade de sair um número par ?

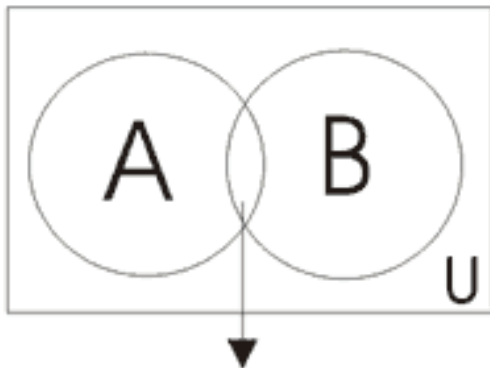
$$A = (2, 4, 6) \quad W = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$$

$$\text{Nota 1 : } 0 \leq P(A) \leq 1$$

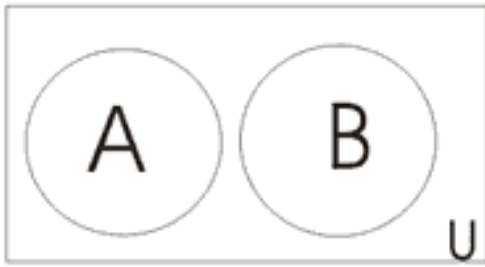
$$\text{Nota 2 : } P(\overline{A}) = 1 - P(A) \text{ onde } \overline{A} \text{ é o evento complementar de } A.$$

Teorema da Soma



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

* Se A e B são eventos mutuamente exclusivos:



$$P(A \cap B) = \emptyset$$

$$\text{logo } P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Eventos Independentes

A e B são eventos independentes se $P(A/B) = P(A)$ e $P(B/A) = P(B)$

Probabilidade Condicional

Ex. Uma urna **I** contém 2 bolas vermelhas e 3 bolas brancas e uma urna **II** contém 4 bolas vermelhas e 5 bolas brancas. Uma urna é escolhida ao acaso e dela uma bola é extraída ao acaso. Qual a probabilidade de observados urna **I** e bola vermelha ?

$$P(\text{URNA} = \text{I}) = 1/2$$

$$P(\text{Vermelha} / \text{I}) = 2/5$$

$$\text{Logo } P(\text{Vermelha} \cap \text{I}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

18_7

MATRIZES

CONCEITO

Matriz é uma tabela constituída por números ou letras dispostos em “m” linhas por “n” colunas.

Exemplo:

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ -1 & 2 & \pi \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

Obs 1. A matriz acima tem 2 linhas por 3 colunas.

Obs 2. A representação genérica da matriz M é $M = (a_{ij})_{n \times p}$ onde a_{ij} é o elemento que ocupa a linha “i” e a coluna “j”.

Para a matriz acima, temos, por exemplo, $a_{23} = p$ e $a_{12} = 5$.

Tipos de Matrizes

Classificação de matrizes

Matrizes Nula: É a matriz que tem todos os seus elementos iguais a zero.

Matriz quadrada: É a matriz que tem o numero m de linhas igual ao número n de colunas.

Obs.: A matriz $n \times n$ é denominada matriz quadrada de ordem n.

Diagonal principal e diagonal secundária:

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Os elementos $a_{11} = 1$, $a_{22} = 5$ e $a_{33} = 9$ formam a diagonal principal e os elementos $a_{13} = 3$, $a_{22} = 5$ e $a_{31} = 7$ formam a diagonal secundária.

Matriz diagonal: É a matriz que apresenta todos os elementos que não pertencem à diagonal principal iguais a zero.

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriz Identidade ou Unidade: É toda matriz quadrada onde os elementos da diagonal principal são iguais a um e os demais elementos são iguais a zero.

Exemplo:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz transposta: Dada uma matriz $A = (a_{ji})_{m \times n}$, chama-se transposta de A a matriz $A^t = (a_{ji})_{m \times n}$, tal que $a_{ji} = a_{ij}$, para todo i e todo j, ou seja, as colunas de A^t são ordenadamente iguais às linhas de A.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$$

Matriz Simétrica

É toda matriz quadrada A tal que $A^t = A$.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \text{ é simétrica pois } A^t = A$$

Matriz Anti-simétrica

É toda matriz quadrada A tal que $A^t = -A$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & +2 \\ -5 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ é anti-simétrica pois } A^t = -A$$

Operações com Matrizes

a) Adição e Subtração

A e B sendo matrizes do mesmo tipo, tem por adição à matriz $C = A \pm B$ onde $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$

b) Multiplicação por um n° real

Sendo $h = (a_{ij})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha \cdot h = (\alpha a_{ij})_{n \times p}$$

Exemplo:

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$$

c) Multiplicação entre matrizes

Para ser possível efetuar o produto entre duas matrizes, o número de colunas da primeira matriz deve ser igual ao número de linhas da segunda matriz.

$$\begin{matrix} A \\ (p \times n) \end{matrix} \cdot \begin{matrix} B \\ (n \times r) \end{matrix} = C$$

Somam-se os produtos dos elementos das linhas da primeira matriz pelos elementos correspondentes das colunas da 2ª matriz.

Disposição prática para o cálculo do produto: Considerando as matrizes A e B e dispondo conforme esquema abaixo, cada elemento c_{ij} é obtido a partir da linha de A e coluna de B que nela se “cruzam”. Assim, por exemplo: $c_{12} = 1 \cdot 7 + 3 \cdot 9 = 34$.

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} & \\ & \\ & \end{bmatrix} \quad c_{12}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 30 & 34 \\ 28 & 36 \\ 52 & 59 \end{bmatrix}$$

Obs. somente existe o produto de uma matriz A por outra B se o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B. Se existe um produto de A por B, o tipo da matriz produto é dado pelo número de linhas de A e pelo número de colunas de B. Pode existir o produto de A por B, mas não existir o produto de B por A.

Equações Matriciais

Veja o modelo: sendo A e B matrizes de mesmas ordem, calcular x em função de A e B.

$$2x - A = 3B$$

Adicionando-se a matriz A pela direita nos 2 membros :

$$2x - A + A = 3B + A$$

$$2x = 3B + A$$

Multiplicando-se os dois membros por 1/2:

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x = \frac{1}{2} (3B + A)$$

$$x = \frac{1}{2} (3B + A)$$

Matriz Inversa

Chama-se matriz inversa da matriz quadrada A e indica-se por A^{-1} , à matriz também quadrada, que, se existir, satisfaz a condição :

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Onde I_n é a matriz unidade ou identidade.

$$I_n = (a_{ij})_{n \times n} \begin{cases} a_{ij} = 1 \text{ se } i = j \\ a_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

Exemplo:

Dada a Matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ sua inversa é: $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, pois.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Noções de Lógica - Problemas de Raciocínio

Conceito Primitivo:

Conceitos primitivos são aqueles aceitos sem definição. Ex. Conceitos de ponto, reta e plano.

Teorema:

Teoremas são proposições aceitas mas mediante demonstração. Ex. Teorema de Pitágoras.

Postulados:

Postulados são preposições aceitas sem demonstração.

Exemplo:

Dois pontos quaisquer formam uma reta.

Observação:

Uma proposição Matemática sempre vai ser verdadeira ou falsa, nunca ocorrendo as duas situações ao mesmo tempo.

Simbologia:

= igual

$\cup$ ou

$\cap$ e

$\cup$ união

$\cap$ intersecção

$\sim$ não

$\exists$ existe

$\nexists$ não existe

$\exists!$ existe e é único

$\forall$ para todo (qualquer)

$\Rightarrow$ implicação

$\Leftrightarrow$ se, somente se

Tabelas Verdade:

Sejam p e q proposições:

Tabela do "ou" ($\cup$)

p	q	$p \cup q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabela do "E" ($\cap$)

p	q	$p \cap q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabela do "se..., então ..." (implicação).

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabela do "se, e somente se"

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

20_1

Página 1

Matérias > Matemática > Princípio da Indução Finita

Princípio da Indução Finita

Seja P uma proposição qualquer referente a um número inteiro.

Normalmente a proposição P tem alguma restrição para um certo n_0 dado.

Assim o princípio da indução finita diz que, se for possível devemos provar que a proposição :

- 1) É verdadeira para n_0 .
- 2) E se ela for verdadeira para um valor k da variável "n" então P também é verdadeira para $k + 1$.

Exemplo:

prove por indução que

$$1 + 3 + 5 + \dots (2n - 1) = n^2 \text{ para } n \in \mathbb{N}^*$$

Uma vez que $n \in \mathbb{N}^*$ nosso $n \in \mathbb{Z}$ vai tomar o valor inicial igual a 1.

$$1) n = 1 : 1 = 1^2$$

$$2) \text{ Vamos ter como hipótese } \exists k \in \mathbb{N}^* / 1 + 3 + 5 + \dots (2k - 1) = k^2$$

$$\text{Nossa tese é que } 1 + 3 + 5 + \dots (2K + 1) = (k + 1)^2$$

$$\text{Partindo da hipótese vamos demonstrar. } \underbrace{1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1)}_{k^2 \text{ (Hipótese)}} = k^2 + 2k + 1$$

Assim

$$k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2 \text{ cqd.}$$

21_4

Página 1

Matérias > Matemática > Determinantes

DETERMINANTES

Definição

Determinante é um número associado à matriz quadrada de ordem “n”.

Ex:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} = 3 \cdot 12 - 4 \cdot 5 = 16$$

16 é o valor do determinante associado na matriz de ordem 2 dada.

Cálculos

DETERMINANTE DE 2ª ORDEM

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

DETERMINANTE DE 3ª ORDEM (Regra de Sarrus)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$(-)$ $(-)$ $(-)$ $(+)$ $(+)$ $(+)$

$$+ (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}) + (a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}) + (a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32})$$

$$- (a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13}) + (a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}) + (a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12})$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$D = 1 + 0 + 8 - 6 - 0 - 8 = -5$

TEOREMA DE LAPLACE

O determinante de ordem “n” é igual a soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer pelos respectivos cofatores.

Chama-se **cofator** ou **complemento algébrico** do elemento a_{ij} e indica-se por C^{ij} ao produto $(-1)^{i+j}$. D^{ij} onde D^{ij} é o determinante obtido suprimindo-se a linha -i e a coluna -j.

REGRA DE CHIÓ

Desde que a matriz M tenha $a_{11} = 1$, suprimimos a 1ª linha e a 1ª coluna de M.

De cada elemento restante na matriz, subtraímos o produto dos elementos que se encontram nas “extremidades das perpendiculares”, traçadas do elemento considerado à 1ª linha e à 1ª coluna.

Com as diferenças obtidas, construímos uma matriz de ordem (n - 1), cujo determinante é igual ao de M.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -4 & 5 & -0 & 1 & -8 \\ 6 & -2 & 3 & -0 & -1 & -4 \\ 2 & -6 & 1 & -0 & 4 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 5 & -7 \\ 4 & 3 & -5 \\ -4 & 1 & -8 \end{vmatrix} = 281$$

Propriedades dos determinantes**Casos em que o determinante é igual a zero:**

- quando todos os elementos de uma fila são nulos.
- quando possui duas filas paralelas proporcionais ou iguais.
- quando uma de suas filas é combinação linear de outras filas paralelas.

Transformações que não alteram um determinante:

- um determinante não se altera quando se trocam ordenadamente as linhas pelas colunas.
- um determinante não se altera quando se somam aos elementos de uma os correspondentes elementos de fila paralela multiplicados por uma constante.

Transformações que alteram determinantes:

- um determinante muda de sinal quando se trocam as posições de duas filas paralelas.
- quando se multiplica (ou divide) uma fila, o determinante fica multiplicado (ou dividido) por esse número.

Propriedades complementares:

- Se numa matriz quadrada forem nulos todos elementos situados de um mesmo lado da diagonal principal, o determinante da matriz será igual ao produto dos elementos da diagonal principal.
- $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ (Teorema de Binet).
- $\det A = \det A^t$.
- determinante de uma matriz de Vandermonde:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (d - c)(d - b)(d - a)(c - b)(c - a)(b - a)$$

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Cálculo da Matriz Inversa através de Determinantes

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (\text{cof } A)^t$$

Obs.

se $\det A \neq 0$ então $\exists A^{-1}$ e a matriz A é dita inversível.

se $\det A = 0$, então não existe A^{-1} , isto é, a matriz A não é inversível.

Neste caso matriz A é dita matriz singular.

Exemplo:

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ calcular sua inversa:

$$\det A = 4 - 6 = -2$$

$$\text{Matriz dos cofatores de } A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Matriz dos cofatores de } A \text{ transposta} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Definição:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

Exemplo:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 5x + 2y = 11 \end{cases} \text{ tem como solução } x = 1 \text{ e } y = 3, \text{ ou seja, } (1; 3).$$

Sistema Linear $\begin{cases} \text{possível ou compatível} \\ \text{(quando admite solução)} \end{cases} \begin{cases} \text{determinado (admite uma única solução - SPD)} \\ \text{indeterminado (admite infinitas soluções - SPI)} \end{cases}$

$\begin{cases} \text{impossível ou incompatível} \\ \text{(quando não admite solução - SI)} \end{cases}$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 5 \end{cases} \text{ não tem solução}$$

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases} \text{ tem solução indeterminada que pode ser representada por } \begin{cases} x = 2 - \alpha \\ y = \alpha \end{cases}$$

Expressão matricial de um sistema linear:

Chamamos de D o determinante da matriz dos coeficientes das incógnitas, isto é,

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Página 3

Matérias > Matemática > Sistemas Lineares

Regra de Cramer:

Esta regra só poderá ser usada para **sistemas possíveis e determinados**.

Um sistema linear será SPD se $D \neq 0$ e neste caso as soluções serão dadas por:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}; x_2 = \frac{D_2}{D}; \dots x_n = \frac{D_n}{D}$$

Onde $D_1, D_2, D_3, \dots, D_n$ são os determinantes que se obtém da matriz dos coeficientes das incógnitas, substituindo-se a coluna dos coeficientes da incógnita procurada pelos termos independentes $b_1, b_2, \dots, b_n$.

Exemplo:

Resolver o sistema linear utilizando a regra de Cramer

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 4y + 4z = 22 \\ 3x + 2y + z = 10 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 12 + 4 - 12 - 8 - 2 = -2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 22 & 4 & 4 \\ 10 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 24 + 40 + 44 - 40 - 48 - 22 = -2 \quad x = \frac{-2}{-2} = 1.$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 22 & 4 \\ 3 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 22 + 72 + 20 - 66 - 40 - 12 = -4 \quad y = \frac{-4}{-2} = 2$$

Logo, $1 + 2 + z = 6 \Leftrightarrow z = 3$ (1,2,3) é a solução

Sistema Escalonado:

Sistema lineares são ditos equivalentes se possuem o mesmo conjunto solução.

Sistemas escalonados são aqueles que apresentam zeros (0), como coeficientes das variáveis da seguinte forma:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ 0x + 1y = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 0x + 1y + 4z = 3 \\ 0x + 0y + 2z = 3 \end{cases}$$

Propriedades Operacionais para Obtermos um Sistema Escalonado:

P1	Num sistema linear quando trocarmos as posições de duas equações o sistema é equivalente ao anterior
P2	Num sistema linear, ao se multiplicar uma equação por um número real não nulo, o sistema continua equivalente.
P3	Num sistema linear, ao se multiplicar uma equação por um número real (não nulo) e somando-se esta a uma outra equação, o sistema obtido é equivalente ao anterior.

Discussão de um Sistema Linear:

Discutir um sistema quer dizer verificar se o sistema é possível, impossível ou indeterminado.

SPD se $D \neq 0$

SPI se $D = 0$ e $D_1 = D_2 = \dots D_n = 0$

SI se $D = 0$ e pelo menos um $D_i \neq 0$

Exemplo:

Dado: $\begin{cases} ax + 3ay = 0 \\ 2x + ay = 4 \end{cases}$ discutir o sistema abaixo.

Seja: $D = \begin{vmatrix} a & 3a \\ 2 & a \end{vmatrix}$ O determinante do sistema.

$$D = a^2 - 6a = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } a = 6.$$

$$a = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 + 0 = 0 \\ 2x + 0 = 4 \end{cases} \quad x = 2 \text{ e } y \text{ é qualquer.}$$

Logo o sistema é indeterminado.

$$a = 6 \Rightarrow \begin{cases} 6x + 18y = 0 \\ 2x + 6y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = 0 \\ 0x + 0y = 2 \end{cases}$$

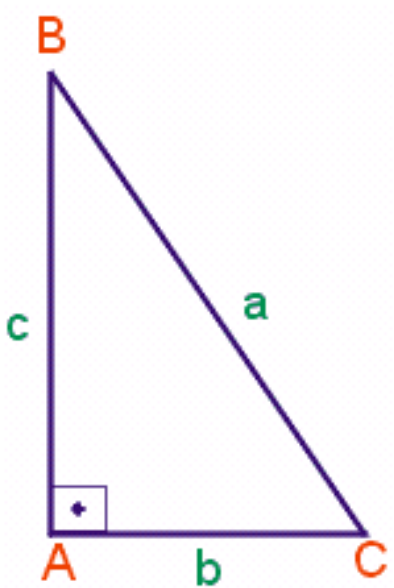
Logo o sistema é impossível.

Resumindo: $\begin{cases} a \neq 0 \text{ ou } a \neq 6 \text{ SPD} \\ a = 0 \text{ SPI} \end{cases} \quad a = 6 \text{ SI.}$

TRIGONOMETRIA

No Triângulo Retângulo

Consideremos o triângulo abaixo:

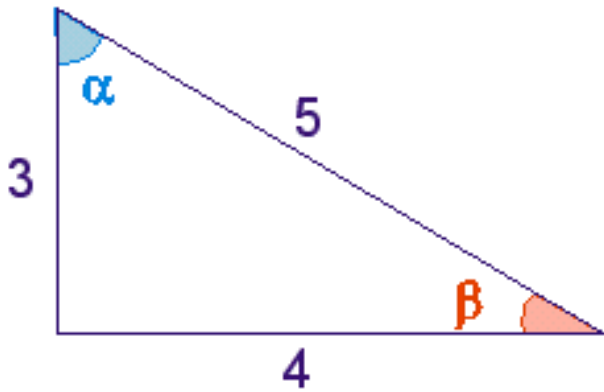


Onde $\hat{A} = 90^\circ$ (ângulo reto) $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são ângulos agudos

São definidos para os ângulos agudos de um triângulo retângulo:

Seno = $\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$	$\text{sen } \hat{B} = \frac{b}{a}$	$\text{sen } \hat{C} = \frac{c}{a}$
Cosseno = $\frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$	$\text{cos } \hat{B} = \frac{c}{a}$	$\text{cos } \hat{C} = \frac{b}{a}$
Tangente = $\frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$	$\text{tg } \hat{B} = \frac{b}{c}$	$\text{tg } \hat{C} = \frac{c}{b}$
Co-tangente = $\frac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}}$	$\text{cotg } \hat{B} = \frac{c}{b}$	$\text{cotg } \hat{C} = \frac{b}{c}$

Ex:



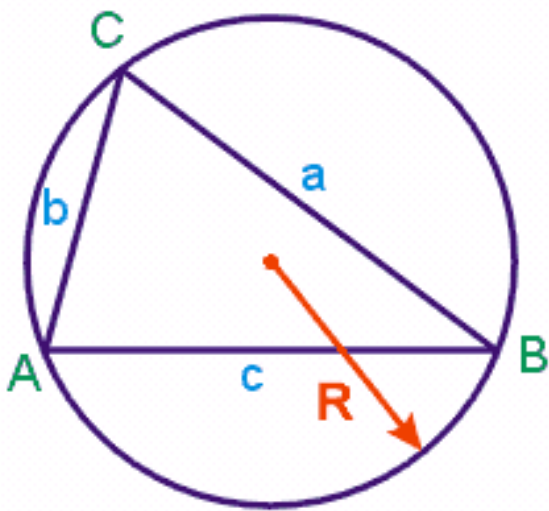
$$\text{Sen } \alpha = 4/5 \quad \text{Sen } \beta = 3/5 \quad \text{Cotg } \alpha = 3/4 \quad \text{tg } \alpha = 4/3$$

$$\text{Cos } \alpha = 3/5 \quad \text{Cos } \beta = 4/5 \quad \text{cotg } \beta = 4/3 \quad \text{tg } \beta = 3/4$$

No Triângulo qualquer

Lei dos Senos

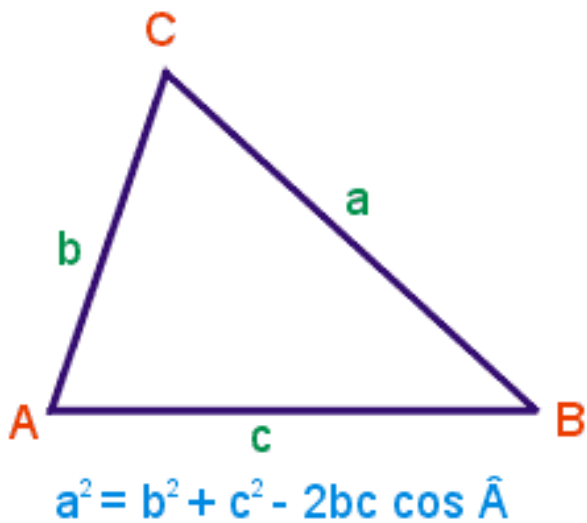
Em qualquer triângulo, o quociente entre cada lado e o seno do ângulo oposto é constante e igual a medida do diâmetro da circunferência circunscrita.



$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$

Lei dos Cossenos

Em qualquer triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o duplo produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.



$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} \quad \text{ou ainda: } \cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

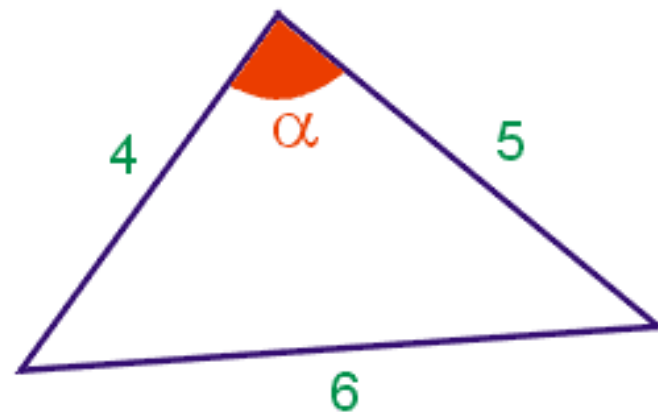
$$\cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Através da lei dos cossenos, deduzimos um critério para determinar se um ângulo interno do triângulo é agudo, reto ou obtuso. Basta aplicar a tabela abaixo:

$\hat{A}$	condição
agudo	$a^2 < b^2 + c^2$
reto	$a^2 = b^2 + c^2$
obtuso	$a^2 > b^2 + c^2$

Ex:



Qual é o valor do $\cos x$?

Utilizando a Lei dos Cossenos temos:

$$6^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos \alpha \quad 36 = 16 + 25 - 40 \cos \alpha \quad 40 \cos \alpha = 5 \quad \cos \alpha = \frac{1}{8}$$

Ângulos Notáveis

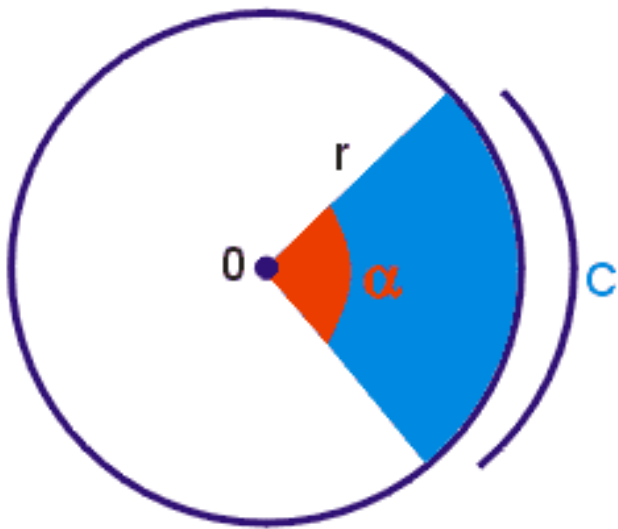
	0	$30^\circ \left(\frac{\pi}{6} \right)$	$45^\circ \left(\frac{\pi}{4} \right)$	$60^\circ \left(\frac{\pi}{3} \right)$	$90^\circ \left(\frac{\pi}{2} \right)$
	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
Seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cosseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$
Co-tangente	$\nexists$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Medidas de Arcos

Radianos

Define-se que $\alpha = \frac{c}{r}$

Onde c é o comprimento do arco determinado pelo ângulo central sobre a circunferência de raio r .



Se $c = r$ então $\alpha = 1$, que recebeu o nome de **radiano**.

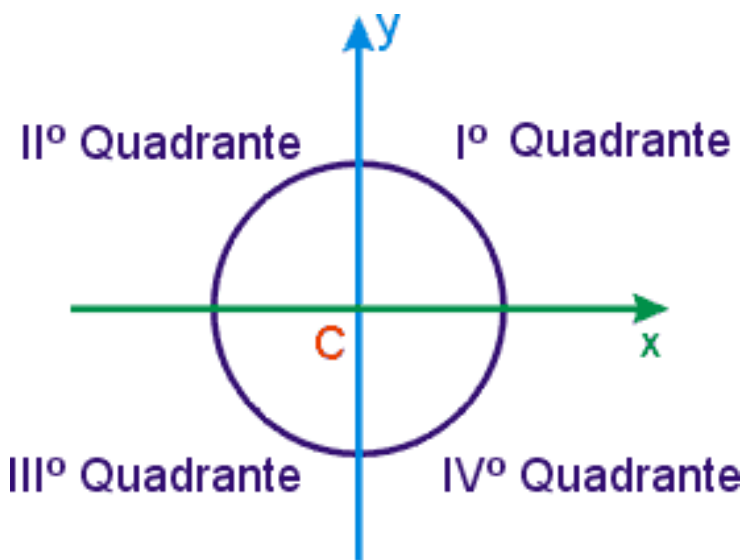
O radical radius vem do latim e quer dizer raio, o sufixo ano adjetiva o substantivo. Radiano é razão entre dois comprimentos, portanto, não tem dimensão, é um número real. Se $c = 2\pi r$ então $\alpha = \frac{2\pi r}{r}$, ou seja, o número real que expressa o ângulo raso (180°) é π . Esta correspondência será usada para fazer conversões entre graus e os números reais.

Círculos Trigonômétricos

O CICLO E AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Definições

Consideremos num sistema cartesiano ortogonal, uma circunferência com centro na origem, raio unitário e sentido de percurso anti-horário a partir do ponto (1;0). Tal circunferência é denominada ciclo trigonométrico.



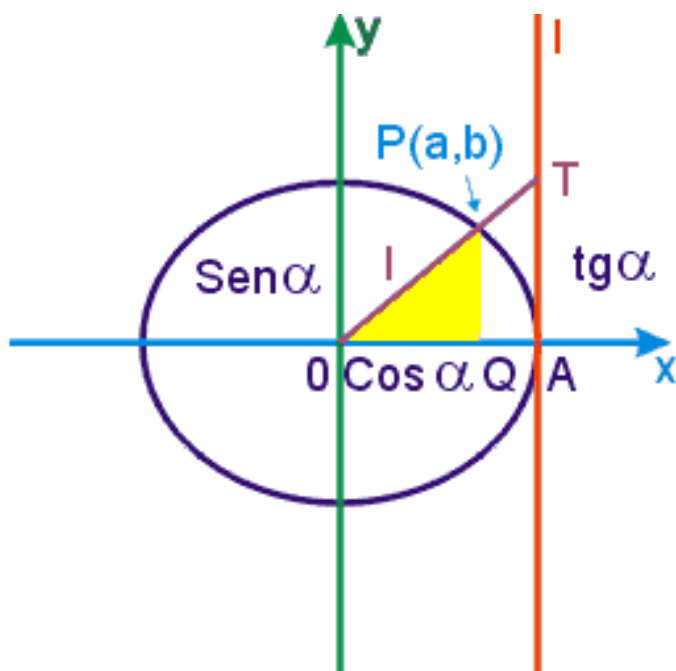
Seja um ponto P de coordenadas cartesianas $(a; b)$, pertencente ao ciclo trigonométrico. O ponto P é extremidade do arco de $\widehat{AP}$ que compreende ângulo central α .

Página 8

Matérias > Matemática > Trigonometria

Nestas condições definimos:

Se pelo ponto A conduzimos a reta t paralela ao eixo y e prolongamos o segmento OP até encontrar t num ponto T, e isso é possível se P não pertence ao eixo y, a ordenada de T será a $\operatorname{tg} \alpha$.



$\text{sen } \alpha = b$ e $\text{cos } \alpha = a$

No triângulo retângulo OQP temos:

$$PQ^2 + OQ^2 = 1,$$

$$(\text{sen } \alpha)^2 + (\text{cos } \alpha)^2 = 1,$$

que pode ser escrita:

$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$ que constitui a chamada relação fundamental trigonométrica.

Os triângulos OAT e OQP são semelhantes, portanto:

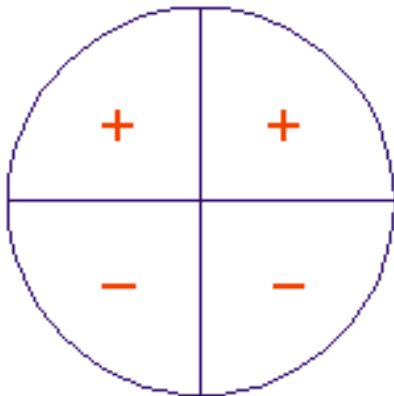
$$\frac{AT}{QP} = \frac{OA}{OQ},$$

$$\frac{\text{tg} \alpha}{\text{sen } \alpha} = \frac{1}{\text{cos } \alpha},$$

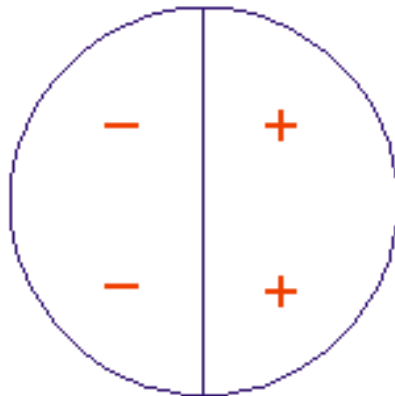
$$\text{tg} \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$$

Os sinais das imagens das funções trigonométricas seguem a distribuição abaixo:

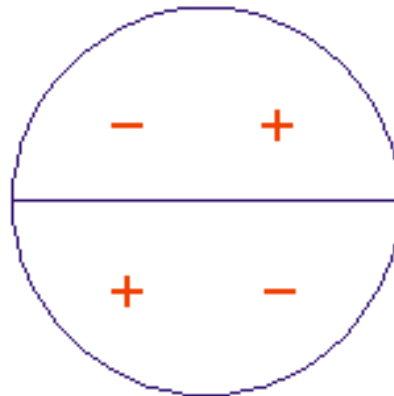
seno



cosseno



tangente



Considerando a primeira determinação dos arcos, ou seja $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ arcos superiores a 90° deverão ser "reduzidos" ao Iº Quadrante da seguinte forma:

$f(\alpha) = (\text{sinal da função no quadrante}). f(K)$

sendo $K = 180^\circ - \alpha$ se α é do IIº Quadrante,

$K = \alpha - 180^\circ$ se α é do IIIº Quadrante,

e $K = 360^\circ - \alpha$ se α é do IVº Quadrante.

Usando a redução ao Iº Quadrante e que $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ montamos a tabela abaixo para os arcos notáveis.

Página 10

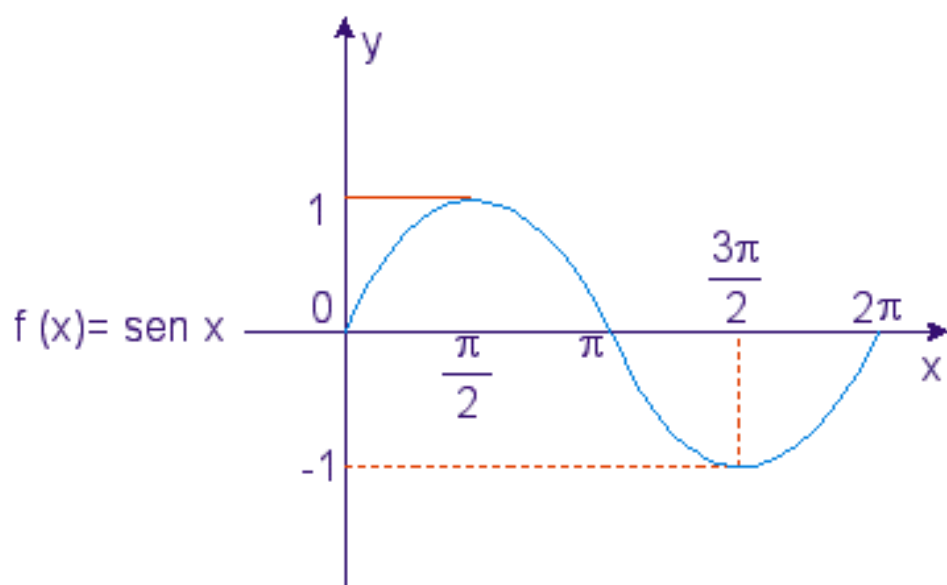
Matérias > Matemática > Trigonometria

Funções Trigonométricas

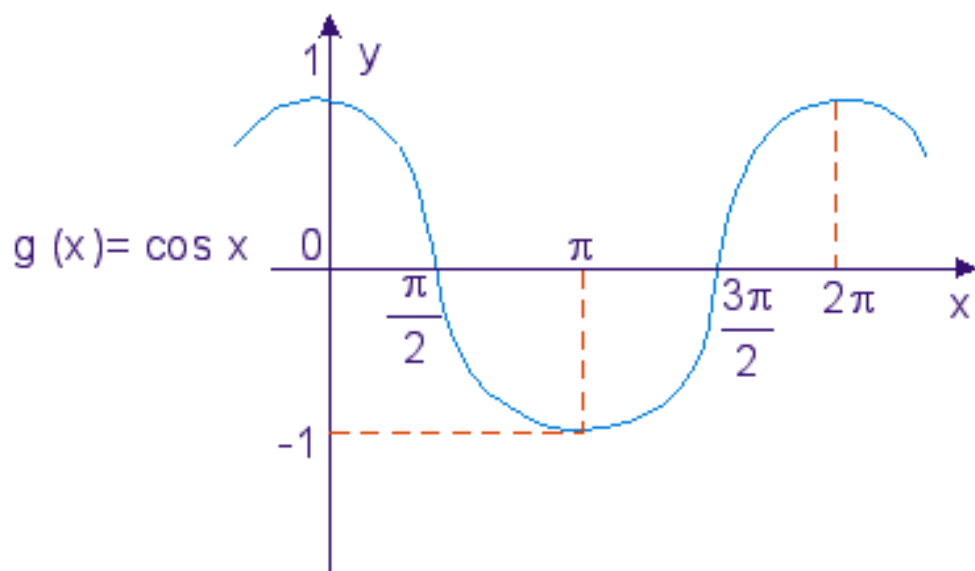
	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sen	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Gráficos das funções trigonométricas

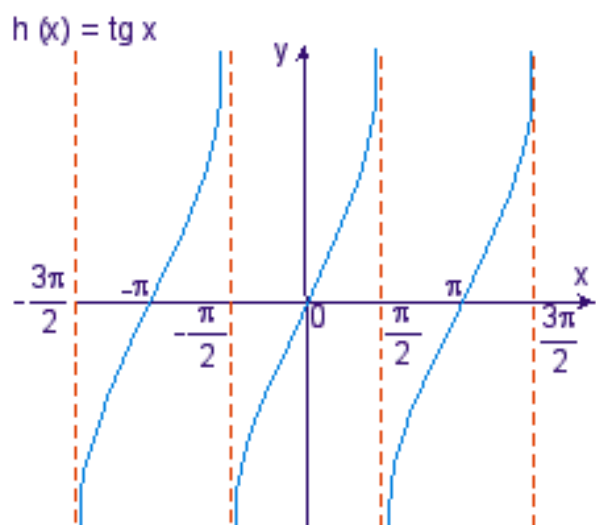
FUNÇÃO SENO

Domínio = $\mathbb{R}$; Imagem = $[-1;1]$

FUNÇÃO COSSENO

Domínio = $\mathbb{R}$; Imagem = $[-1;1]$

FUNÇÃO TANGENTE

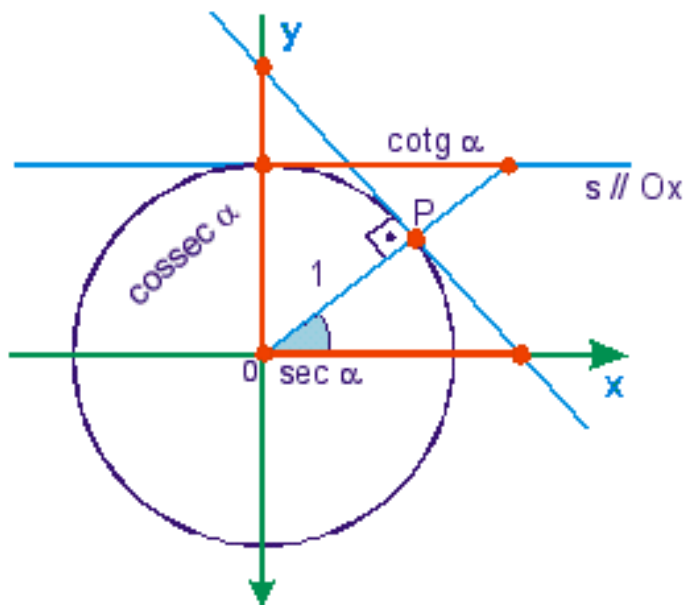


Domínio = $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$; imagem = $\mathbb{R}$.

Página 12

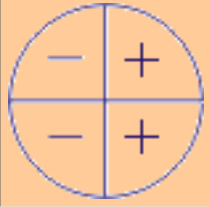
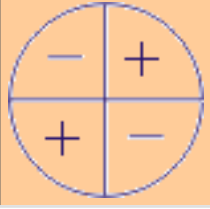
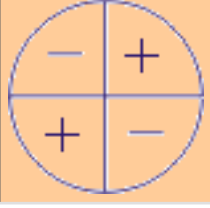
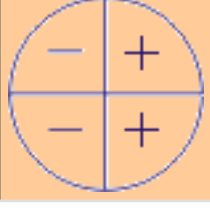
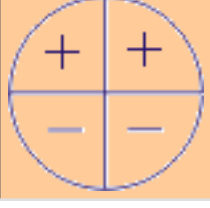
Matérias > Matemática > Trigonometria

Funções Trigonométricas secundárias: co-tangente, secante e cossecante.



Demonstra-se que: $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$, $\cos \sec \alpha = \frac{1}{\sen \alpha}$, $\cot g \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$

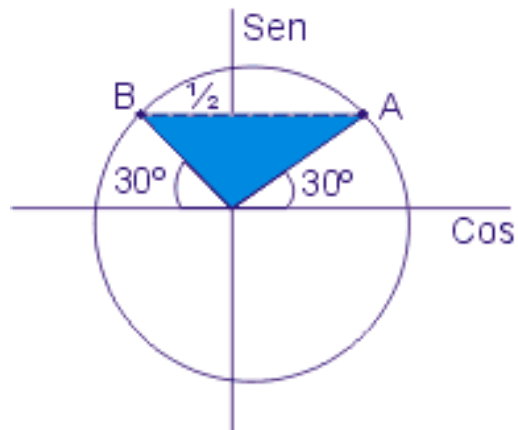
Função	Período	Sinais	Domínio	Imagem
--------	---------	--------	---------	--------

sen x	2p		R	[-1, 1]
cos x	2p		R	[-1, 1]
tg x	p		$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	IR
cotg x	p		$x \neq k\pi$	IR
sec x	2p		$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$
cossec x	2p		$x \neq k\pi$	$] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

Equações e Inequações Trigonômicas

Veja o Modelo:

$$\text{sen } x = \frac{1}{2}$$



Ponto A: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

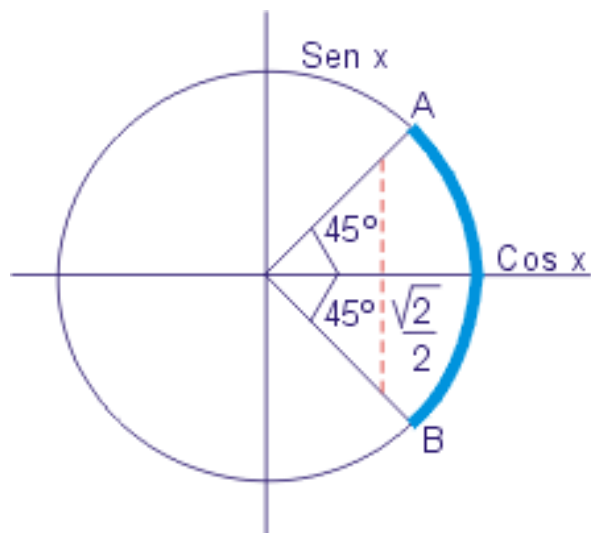
Ponto B: $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

Onde $k \in \mathbb{Z}$

Ex:

$$\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < +\frac{\pi}{4} + 2k\pi}$$



Relações entre as Razões Trigonométricas

Relações Auxiliares

$$\sec^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \text{ e } \operatorname{cosec}^2 \alpha = 1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha$$

Relações Fundamentais e auxiliares

$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x = 1$	$\operatorname{sen} x = \frac{1}{\operatorname{cosec} x}$
$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}$	$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$
$\operatorname{cotg} x = \frac{\operatorname{cos} x}{\operatorname{sen} x}$ $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$	$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ $\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{cotg}^2 x$

Redução ao 1º Quadrante

Sejam a e b arcos do 2º Quadrante

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{sen} a = \operatorname{sen}(\pi - a) \\ \operatorname{cos} b = -\operatorname{cos}(\pi - b) \\ \operatorname{tg} a = -\operatorname{tg}(\pi - a) \end{array} \right\} \text{do 2º Quadrante para o 1º quadrante.}$$

Sejam a, b arcos do 3º quadrante.

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{sen} a = -\operatorname{sen}(a - \pi) \\ \operatorname{cos} a = -\operatorname{cos}(a - \pi) \\ \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} (b - \pi) \end{array} \right\} \text{do 3º para o 1º quadrante}$$

Sejam a, b arcos do 4º quadrante

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{sen} a = -\operatorname{sen}(-a) \\ \cos b = \cos(-b) \\ \operatorname{tg} a = -\operatorname{tg}(-a) \end{array} \right\} \text{do } 4^\circ \text{ quadrante para o } 1^\circ \text{ quadrante}$$

Ex:

$$\cos(270 - x) = -\cos(90 - x) = -\operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{sen}(90 - x) = \cos x \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\operatorname{cotg} x$$

Página 16

Matérias > Matemática > Trigonometria

Transformações Trigonométricas

Adição de Arcos

Demonstra-se que:

$$\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cos b \pm \operatorname{sen} b \cos a$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{tg}(a \pm b) = \frac{\operatorname{tga} \pm \operatorname{tgb}}{1 \mp \operatorname{tga} \operatorname{tgb}}$$

Ex:

$$\operatorname{sen}(75) = \operatorname{sen}(45^\circ + 30^\circ) = \operatorname{sen} 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \operatorname{sen} 30^\circ \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\begin{aligned}\cos \frac{x}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \rightarrow \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \\ \sin \frac{x}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \rightarrow \sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \\ \operatorname{Tg} \frac{x}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} \rightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}\end{aligned}$$

Ex:Calcular $\cos 22^\circ 30'$;

$$\text{fazendo } \cos 22^\circ 30' = \cos \left(\frac{45}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 + \cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

Ex:Sabendo que $\sin a = \frac{2}{3}$ e $0 < a < 90^\circ$; calcule $\sin 2a$ e $\cos 2a$ Aplicando a Relação: $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ temos

$$\cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{Assim } \sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

Transformação em Produto

$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right)$$

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{p-q}{2} \right) \cos \left(\frac{p+q}{2} \right)$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \operatorname{sen} \left(\frac{p+q}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{p-q}{2} \right)$$

$$\operatorname{tg} p \pm \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen}(p \pm q)}{\cos p \cos q}$$

Exemplo:

Transformar em Produto a Expressão:

$$\operatorname{sen} 2x + 2 \cos x.$$

Resolução: $\operatorname{sen} 2x + 2 \cos x = 2 \operatorname{sen} x \cos x + 2 \cos x = 2 \cos x (\operatorname{sen} x + 1)$ Mas: $\operatorname{sen} x + 1 = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 2 \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$

Então: $\operatorname{sen} 2x + 2 \cos x = 2 \cdot (\cos x) \cdot \left[2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right]$

$$\operatorname{sen} 2x + 2 \cos x = 4 \cdot \cos x \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$$

Funções trigonométricas Inversas

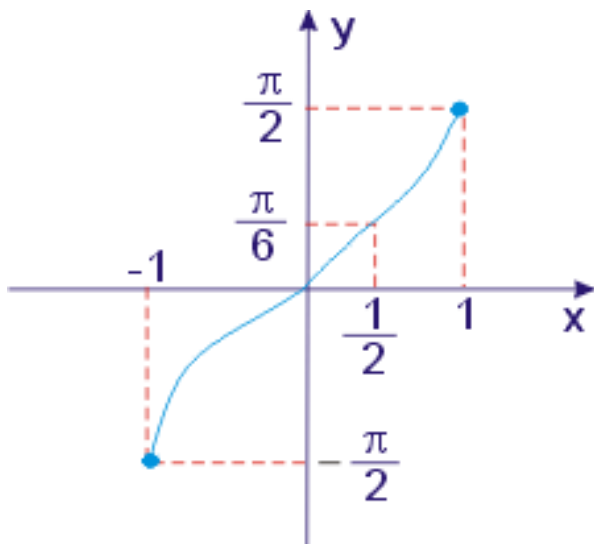
1. FUNÇÃO ARCO-SENO

Consideremos $y = \sin x$

no intervalo $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ com contra domínio $[-1;1]$.

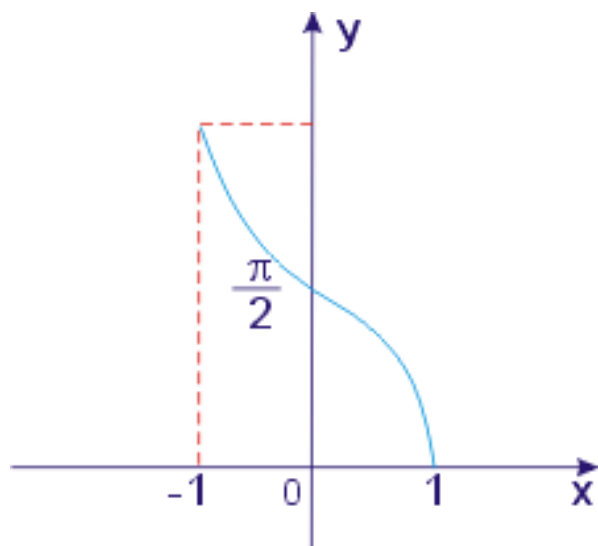
Nestas condições temos uma função bijetora e então podemos definir a sua função inversa, ou seja,

$y = \arcsen x$ com domínio $[-1;1]$ e imagem $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ conforme o gráfico abaixo.



2. FUNÇÃO ARCO-COSSENO

$$y = \arccos x \Rightarrow \cos y = x$$

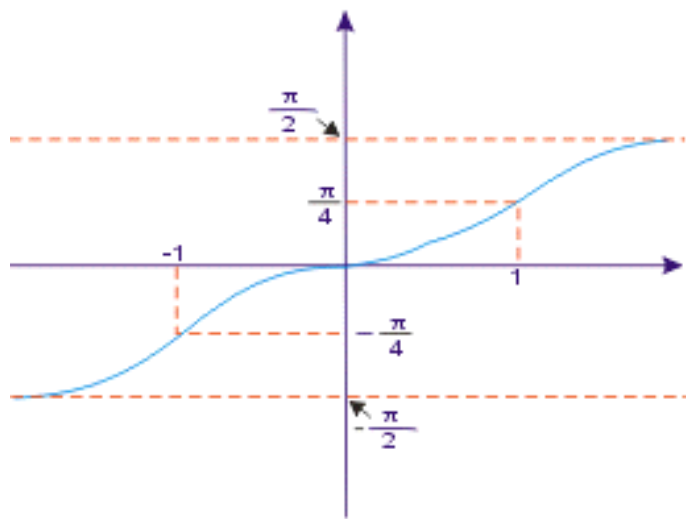


$$D = [-1, 1]$$

$$I = [0, \pi]$$

3. FUNÇÃO ARCO-TANGENTE

Consideremos $y = \operatorname{tg} x$ no intervalo $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$; sua função inversa é $y = \arctg x$ com domínio real e imagem $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ conforme o gráfico abaixo.



Ex:

Calcular:

$$y = \operatorname{tg} \left[\arccos \left(\frac{-1}{5} \right) \right]; \text{ seja } a = \arccos \left(\frac{-1}{5} \right) \rightarrow \cos a = \frac{-1}{5} \text{ desde que } 0 \leq a \leq \pi.$$

$$\text{Logo, } \operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1.$$

$$\operatorname{sen}^2 a + \frac{1}{25} = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} a = \frac{2\sqrt{6}}{5} \Rightarrow \operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} = -2\sqrt{6}$$

24_3

Página 1

Matérias > Matemática > Polinômios

POLINÔMIOS

Definição

Chama-se polinômio na variável real x , toda a expressão da forma $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x^1 + a_nx^0$ onde $N \in \mathbb{N}$.

Raiz ou zero do Polinômio

Trata-se do valor de $P(x)$ que faz: $P(x) = 0$

A existência das raízes da equação $P(x) = 0$ é garantida pelo teorema fundamental da álgebra, atribuído a D'Alembert: "Toda equação polinomial tem pelo menos uma raiz, real ou complexa".

Valor Numérico de um polinômio

Para $x = b$ é representado por $P(b) = a_0 \cdot b^n + a_1 \cdot b^{n-1} + a_2 \cdot b^{n-2} + \dots + a_n$

Grau de um Polinômio

Chama-se grau de um polinômio $P(x) \neq 0$, o número $n \in \mathbb{N}$ tal que n é o maior valor de $n \in \mathbb{N}$, para o qual $a_n \neq 0$ (onde $n = 0, 1, 2, 3, \dots$) Ex. $P(x) = 2x^3 - 3x + 1$ Grau 3 $P(x) = 5$ Grau 0 $P(x) = x^2 - 3x + 7$ Grau 2

Polinômio Nulo

Diz-se que um polinômio $P(x)$ é identicamente nulo se $P(a) = 0$ para qualquer a .

Operações com Polinômios

Soma / Subtração de Polinômios

Da álgebra elementar temos que nós só podemos somar e/ou subtrair termos semelhantes, ou seja, termos que possuam expoentes iguais. Ex. $P(x) = 3x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 12x - 8$ $Q(x) = x^4 - 12x^2 + 7x + 2$ $P(x) + Q(x) = 4x^4 - 7x^3 - 7x^2 + 19x - 6$ $P(x) - Q(x) = 2x^4 - 7x^3 + 17x^2 + 5x - 10$

Multiplicação de Polinômios

Ex:

$$(2x^2 - 7x + 4) \cdot (x^3 + 2x) = 2x^5 + 4x^3 - 7x^4 - 14x^2 + 8x$$

Divisão de Polinômios

Método da chave:

Ex:

$$\begin{array}{r}
 x^4 - x^2 + x + 2 \quad | \quad 2x^2 - 2x + 1 \\
 - x^4 + x^3 - \frac{x^2}{2} \\
 \hline
 x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + 2 \\
 - x^3 + x^2 - \frac{x}{2} \\
 \hline
 -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 \\
 \frac{1x^2}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \\
 \hline
 9/4
 \end{array}$$

Assim o $Q(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$ é o quociente da divisão e $R(x) = 9/4$ é o resto.

Teoremas

Teorema do Resto

O resto da divisão de um polinômio $p(x)$ por $x - c$ é o valor numérico de $p(x)$ em c , isto é, o resto é $p(c)$.

Ex:

Calcular o resto da divisão de $f = x^3 - 2x^2 + 3$ por $x - 1$.

$$r = f(1) = 1 - 2 + 3 = 2$$

Teorema de D'Alembert

Um polinômio $p(x)$ é divisível por $x - c$ se e somente se $p(c) = 0$.

Dispositivo de Briot – Ruffini

Dividir $x^3 - 7x - 6$ por $x - 3$. Observando que $x^3 - 7x - 6 = x^3 + 0x^2 - 7x - 6$, temos:

1	0	-7	-6	3	
1	3	2	0		$q = x^2 + 3x + 2 \quad r = 0$

25_3

Página 1

Matérias > Matemática > Equações Algébricas

Equações Algébricas

Definição

Uma equação algébrica ou polinomial é a equação do tipo $p(x) = 0$

Teorema: se um número complexo é raiz de uma equação polinomial, então o seu conjugado também é raiz desta equação e com mesma multiplicidade.

Teorema Fundamental da Álgebra

Toda a equação polinomial tem pelo menos uma raiz, real ou complexa.

Multiplicidade de Raízes

Dizemos que x_0 é raiz de multiplicidade 2 quando x_0 é raiz duas vezes. Se o x_0 é raiz tripla dizemos que x_0 é raiz de multiplicidade 3 etc...

Página 2

Matérias > Matemática > Equações Algébricas

Relações de Girard

Eq. de 3º grau: sejam r_1, r_2, r_3 , as raízes da equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

$$r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{b}{a}$$

$$r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3 = \frac{c}{a}$$

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = -\frac{d}{a}$$

Ex:

Sejam x_1, x_2, x_3 as raízes da equação $2x^3 + 4x^2 - 5x + 8$; escrever as relações de Girard:

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-b}{a} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{c}{a} = \frac{-5}{2}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a} = \frac{-8}{2} = -4$$

Pesquisa de raízes racionais

Seja a equação $a_n x^{n-1} + a_{n+1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.

Dizemos que as prováveis raízes racionais desta equação pertencem ao conjunto dos números $\frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{Z}^*$ onde $p \in$ divisores a_0 e $q \in$ divisores de a_n .

Ex:

Resolver a equação $x^3 - 7x + 6 = 0$.

$p/q = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \Rightarrow$ são as possíveis raízes.

Devemos verificar qual ou quais desses valores é (são) raízes de $P(x)$. No caso $P(1)$, $P(-3)$ e $P(2)$ são nulos logo $x_1 = 1$, $x_2 = -3$, $x_3 = 2$ são as raízes do polinômio.

Geometria Analítica

Definição

É uma parte da matemática que trata de resolver problemas geométricos por processos algébricos.

Coordenadas de um ponto:

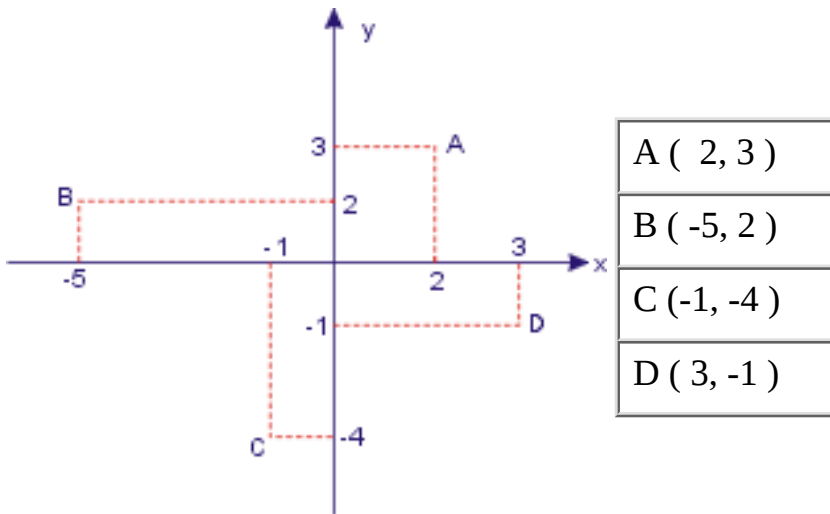
Consideremos uma reta M . Nela vamos marcar um ponto arbitrário. Ele será definido como origem.



Agora podemos marcar qualquer ponto dado. Por ex: Pontos 3 e -4 .



Imagine agora dois eixos ortogonais que chamaremos de eixos X e Y . Vamos marcar pontos neste plano encontrando as coordenadas (X : Abscissa e Y Ordenada) destes pontos:



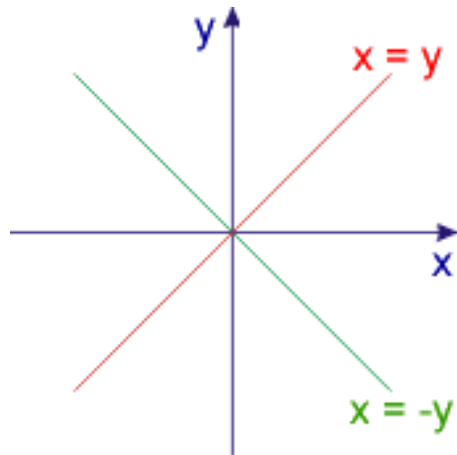
Propriedade

Obs. Qualquer ponto do eixo x tem $y = 0$

Qualquer ponto do eixo Y tem $x = 0$

Obs. Pontos da Bissetriz dos quadrantes ímpares 1º. e 3º. tem $x = y$

Ponto da Bissetriz dos quadrantes pares 2º. e 4º. tem $x = -y$

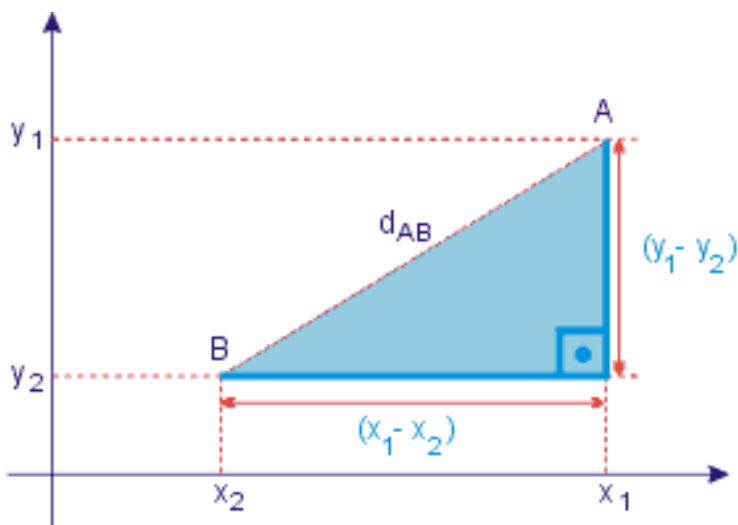


Página 3

Matérias > Matemática > Geometria Analítica

Distância de 2 pontos

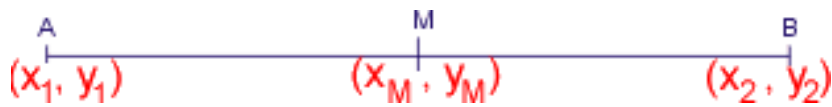
Distância de dois pontos



$$d_{AB} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Ponto médio

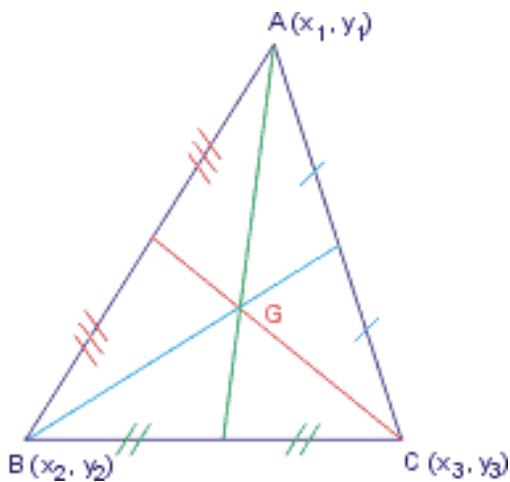
Ponto médio de um segmento



$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ e } y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Baricentro

Baricentro do triângulo



$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

Condição de alinhamento de 3 pontos

Dados 3 pontos $A(X_A, Y_A)$; $B(X_B, Y_B)$; $C(X_C, Y_C)$

Temos que A, B e C estão alinhados se:

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{Se os pontos não estiverem alinhados, formam um triângulo de área} \quad A = \frac{1}{2} |D|$$

Equação da reta por dois pontos

Equação da reta por 2 pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2)

Equação geral da reta

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Que desenvolvido resulta em:

$$ax + by + c = 0$$

Equação da reta por um ponto e um ângulo

Dada a equação geral

$$ax + by + c = 0$$

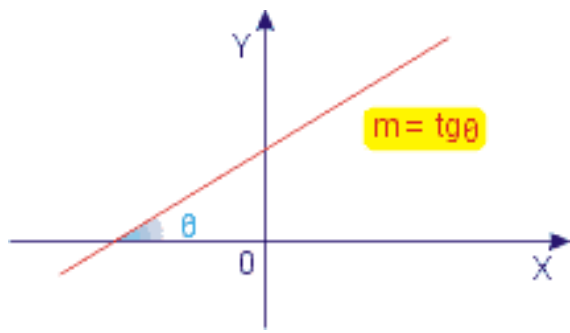
isolando-se o y temos:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \quad \text{onde: } -\frac{a}{b} = m \quad \text{e} \quad -\frac{c}{b} = n$$

Dados 2 pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, distintos, calculamos m, coeficiente angular, como segue:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

o coeficiente angular é a tangente do ângulo o que a reta forma com o eixo das abscissas.



Dada a equação geral da reta

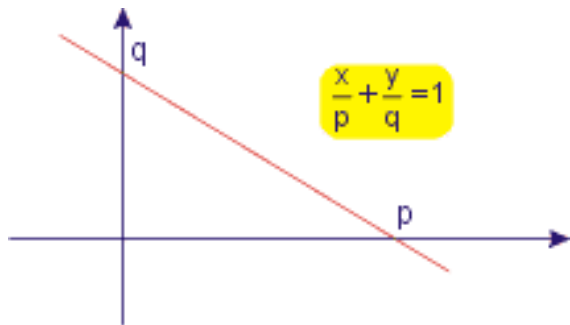
$$ax + by + c = 0 \rightarrow m = -\frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$$

Página 6

Matérias > Matemática > Geometria Analítica

Tipos de equação da reta

Equação segmentária da reta



Equação reduzida da reta

$$y = mx + n$$

Posição relativa de 2 retas

Retas paralelas

$$m_1 = m_2$$

Retas perpendiculares

$$m_1 = \frac{-1}{m_2}$$

Distância de ponto a retas

Distância do ponto (x_0, y_0) à reta $ax + by + c = 0$:

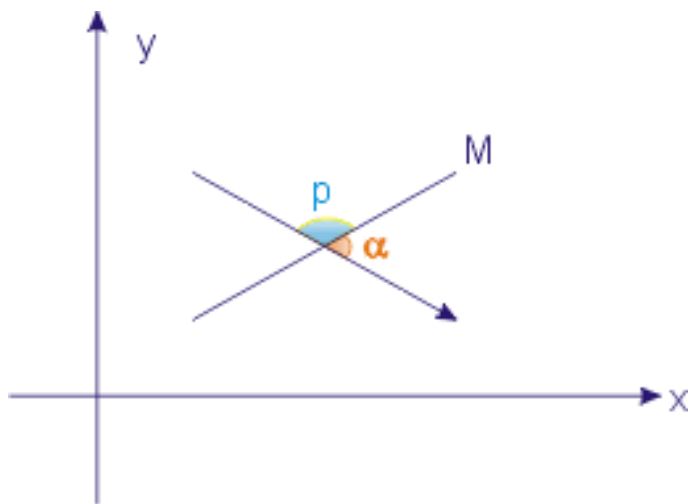
$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Página 7

Matérias > Matemática > Geometria Analítica

Ângulo de duas retas

Sejam M e Δ concorrentes como na fig. abaixo.



Obs. Que elas formam dois ângulos α e β de tal forma que $\alpha + \beta = 180$ ou seja

$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \beta$$

O ângulo α entre elas é calculado por:

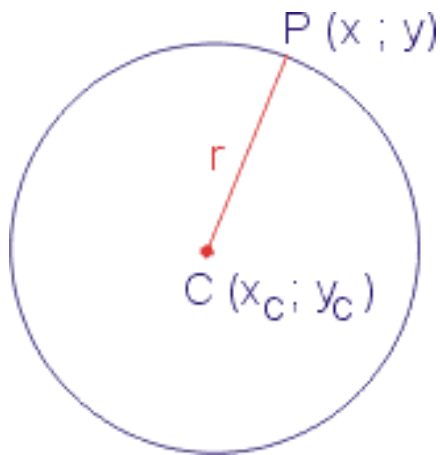
$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{m_M - m_{\Delta}}{1 + m_M \cdot m_{\Delta}} \right|$$

Onde m_M e m_{Δ} são os coeficientes angulares das duas retas.

Circunferência

Equação da circunferência

Equação reduzida da circunferência



$$\delta_{PC} = r \text{ ou } \sqrt{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2} = r \text{ ou ainda}$$

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$$

Equação normal da circunferência

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \delta = 0$$

Coordenadas do centro

$$x_C = \frac{\alpha}{-2} \quad y_C = \frac{\beta}{-2}$$

Raio

$$r = \sqrt{x_C^2 + y_C^2 - \delta}$$

Condição de existência

$$x_C^2 + y_C^2 - \delta > 0$$

Posição relativa entre uma reta e uma circunferência

Dados uma circunferência de equação

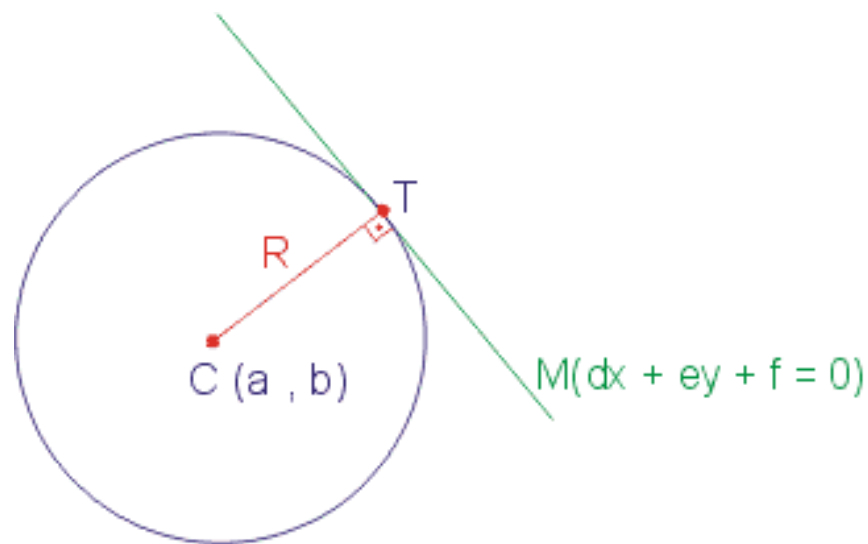
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Na forma normal $\begin{cases} \text{Centro} \\ (a,b) \\ \text{Raio } R \end{cases}$

E uma reta m de equação: $dx + ey + f = 0$.

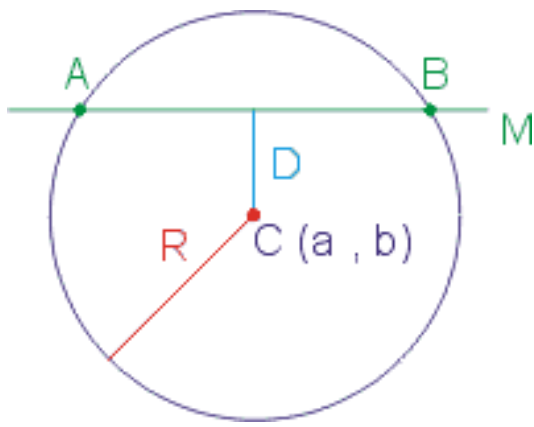
Temos que pode ocorrer 3 posições da reta em relação à circunferência.

1º. Tangente



T: Ponto de tangência. Seja d a distância entre o centro C e a reta M . Neste caso: $d = R$

2º. Secante



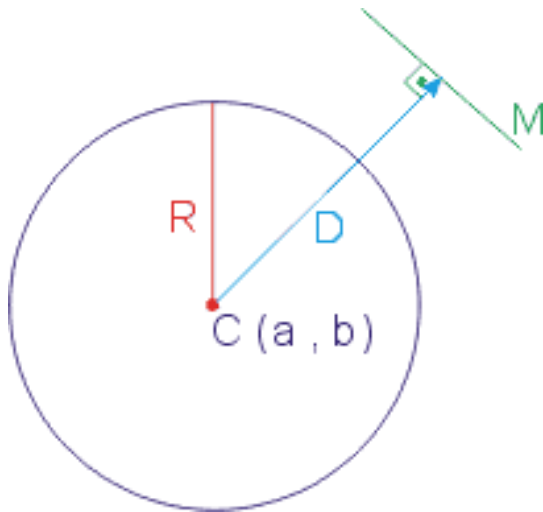
Neste caso $d < R$.

O segmento $\overline{AB}$ é denominada corda.

Página 10

Matérias > Matemática > Geometria Analítica

3º. Exterior



Neste caso $d > R$. No caso de conhecermos as equações da reta e da circunferência, para se saber qual caso temos, vamos resolver o sistema formado por suas equações e descobrir o número de soluções:

$$\begin{cases} dx + ey + f = 0 \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \end{cases}$$
 Este sistema pode ter 0, 1 ou 2 soluções, dependendo do discriminante Δ da equação do 2º. Grau associado:

Se:

$\Delta > 0$ 2 soluções: A reta e a circunferência são secantes

$\Delta = 0$ 1 solução : tangentes

$\Delta < 0$ 0 solução : exteriores

Página 11

Matérias > Matemática > Geometria Analítica

Exemplo:

Qual a posição relativa da reta de equação $x + y - 1 = 0$ com a circunferência $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$?

Resolvendo o sistema
$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

Temos.

$y = 1 - x$ e substituindo na equação da circunferência ficamos com:

$$x^2 + (1 - x)^2 - 4x - 2(1 - x) = 0$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x - 2) = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 1$$

ou

$$x = 2 \Rightarrow y = -1$$

Logo a reta é secante à circunferência nos pontos (0; 1) e (2; -1).

27_11

Página 1

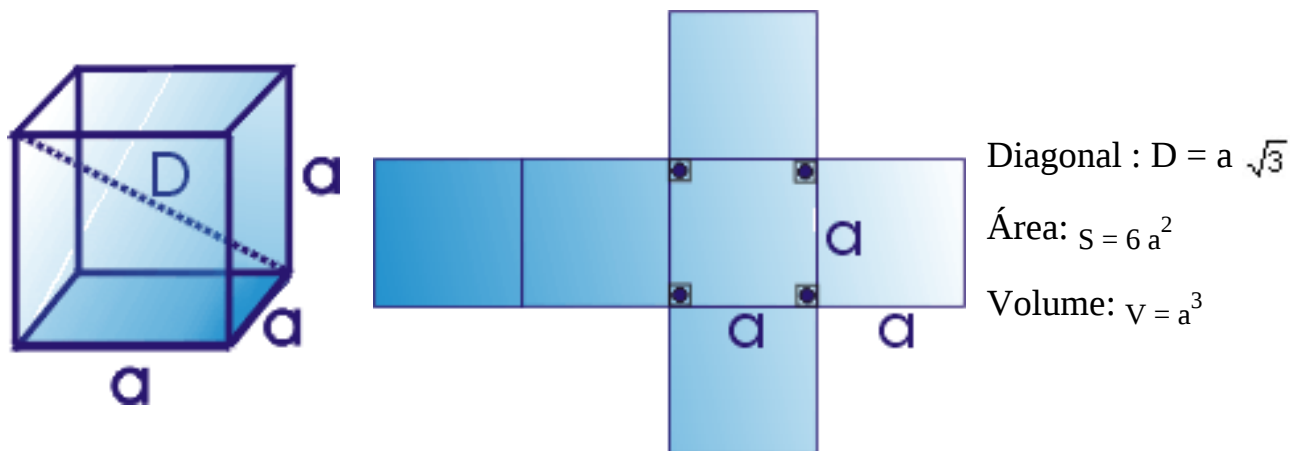
Matérias > Matemática > Geometria Espacial

GEOMETRIA ESPACIAL

CUBO

Cubo ou Hexaedro Regular

É o sólido construído com seis quadrados conforme ilustra a figura abaixo.



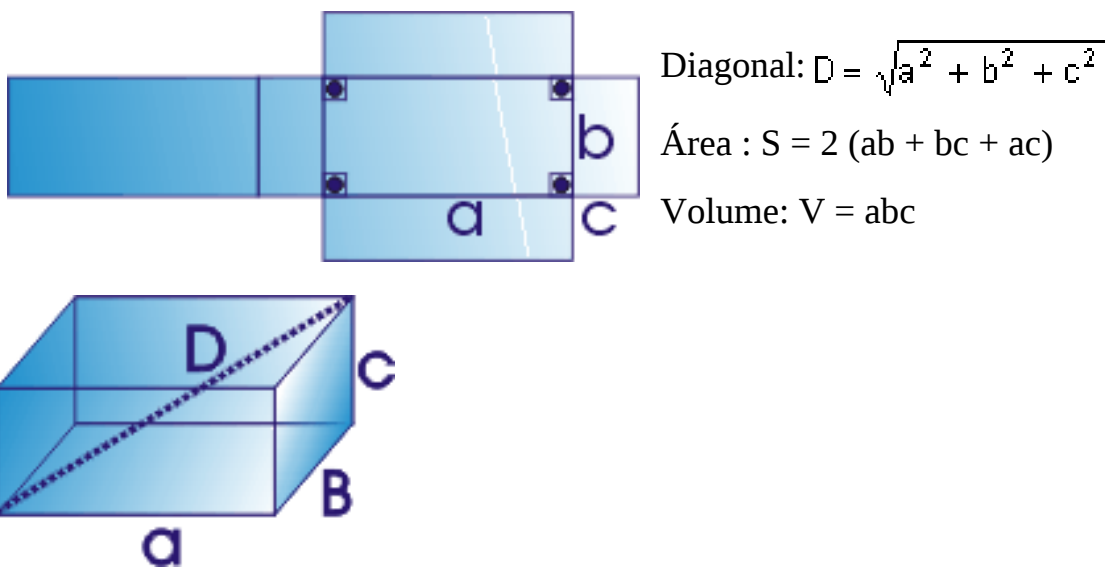
Página 2

Matérias > Matemática > Geometria Espacial

Paralelepípedo

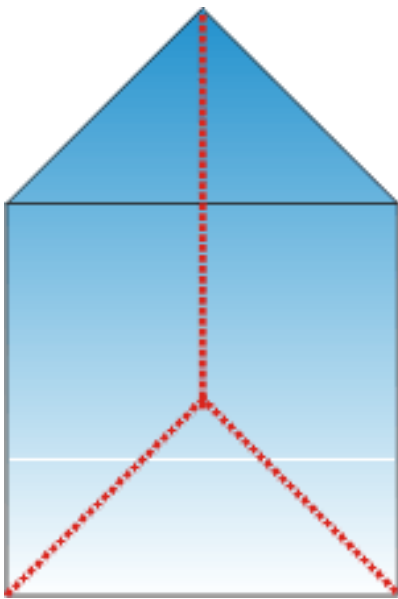
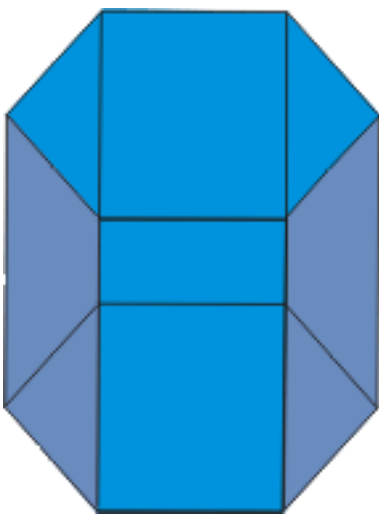
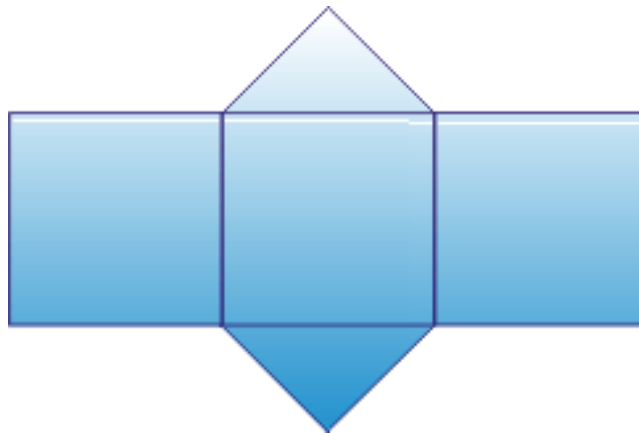
Paralelepípedo Reto-Retângulo

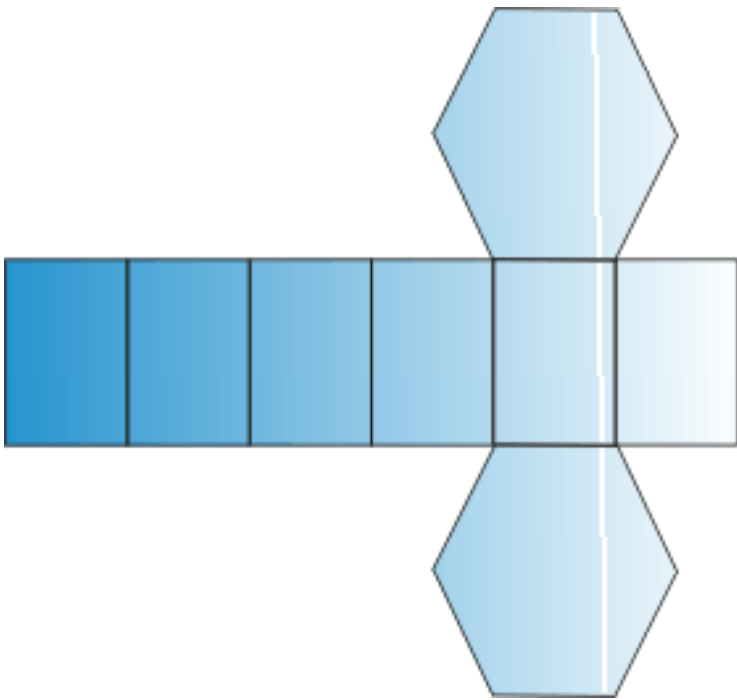
É o sólido construído com seis retângulos, congruentes dois a dois, conforme ilustra a figura abaixo,



Prismas

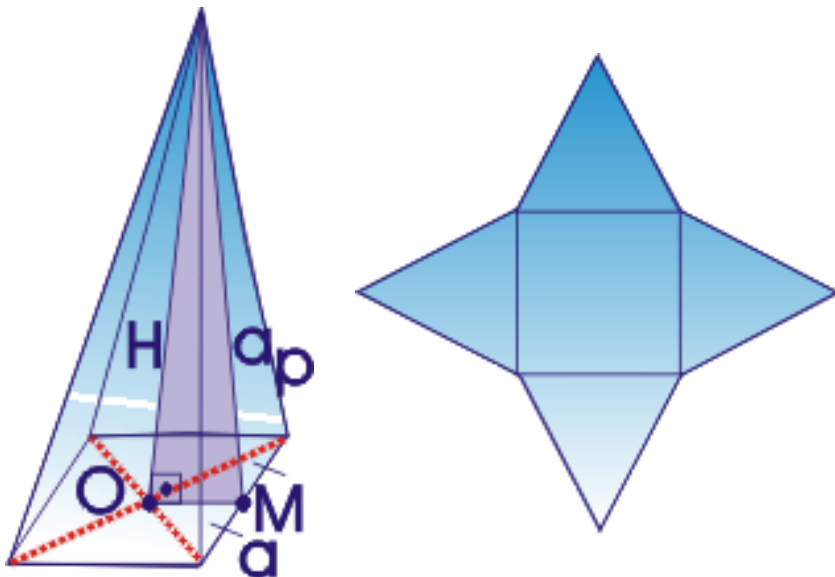
Além do cubo e do paralelepípedo reto-retângulo estudados anteriormente, também são prismas os sólidos representados abaixo. Se suas bases forem polígonos regulares, e as arestas laterais perpendiculares às bases, eles se denominam **prismas regulares**.

**H****H**Volume: $V = S_b \cdot H$ onde S_b é a área da base.



Pirâmides

São sólidos como o representado na figura abaixo. Se a base for um polígono regular, e a projeção ortogonal do vértice sobre a base coincidir com o seu centro, a pirâmide é denominada **pirâmide regular**.



$H^2 = a^2 + a_p^2$ onde H : altura da pirâmide.

a : apótema da base (raio da circunferência inscrita).

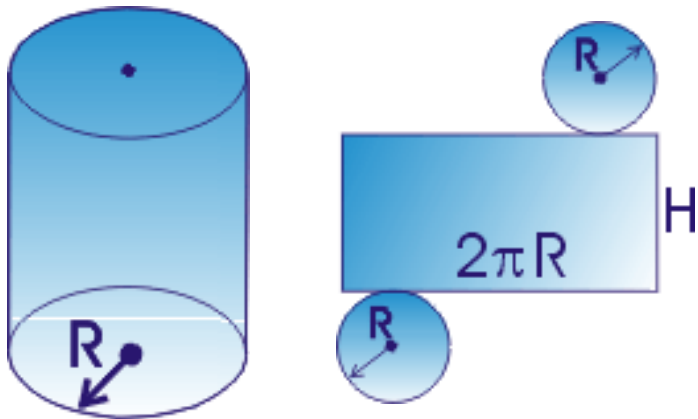
a_p : apótema da pirâmide, ou apótema lateral.

$$\text{Volume: } V = \frac{S_b \cdot H}{3}$$

Cilindros

Cilindro Circular Reto

É o sólido como o representado na figura abaixo.



$$\text{Área Lateral: } S_e = 2\pi RH$$

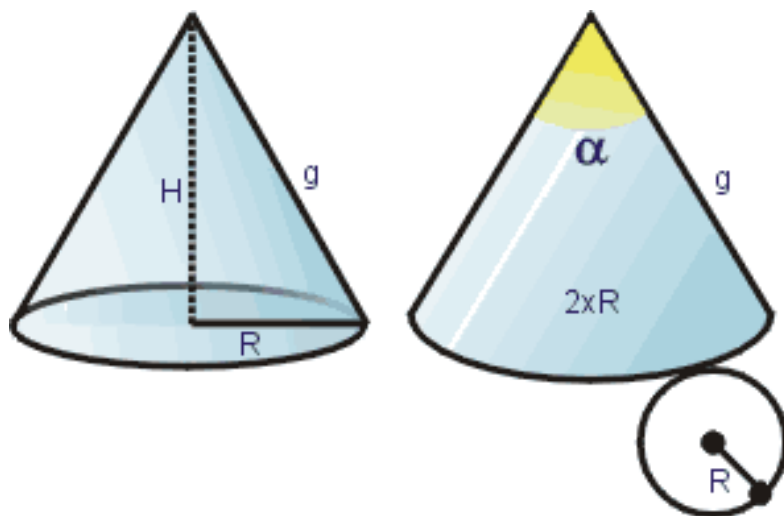
$$\text{Área total: } S = 2\pi R(H + R)$$

$$\text{Volume: } V = \pi R^2 H$$

CONE

Cone Circular Reto

É o sólido como o representado na figura abaixo.



Área lateral: $S_{\ell} = \pi Rg$

Área total: $S = \pi R(g + R)$

Volume: $V = \frac{\pi R^2 H}{3}$

ESFERAS E DERIVADOS

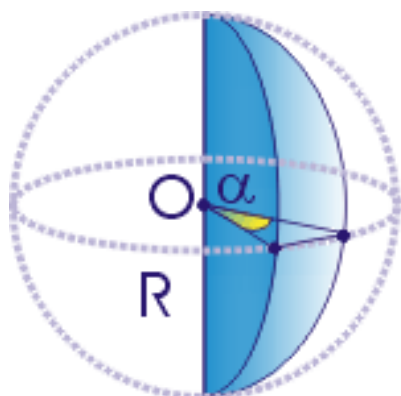
Área da superfície: $S = 4\pi R^2$



Volume: $V = \frac{4}{3} \pi R^3$

CUNHA

Área do fuso: $\frac{S}{4\pi R^2} = \frac{\alpha}{360^\circ}$



Volume da cunha: $\frac{V}{\frac{4}{3} \pi R^3} = \frac{\alpha}{360^\circ}$

Poliedros:

São sólidos do espaço de 3 dimensões cuja fronteira é a reunião de partes de planos.

Tetraedro	4 faces
Pentaedro:	5 faces
Hexaedro	6 faces
Heptaedro	7 faces

Etc...

Relação de Euler

Em qualquer poliedro convexo é válida a relação:

$$V - A + F = 2$$

Onde: $V = n^{\circ}$ de vértices;

$A = n^{\circ}$ de arestas;

$F = n^{\circ}$ de faces.

Soma dos ângulos das faces : S

$$S = (V-2).360$$

Poliedros de Platão

Existem cinco e somente cinco Poliedros de Platão.

	F	A	V
Tetraedo	4	6	4
Hexaedro	6	12	8
Octaedro	8	12	6
Dodecaedro	12	30	20
Icosaedro	20	30	12

Sólidos de Revolução

O cálculo da área de uma superfície de revolução pode ser feito, usando-se a seguinte fórmula:

$$A = 2\pi L \cdot d$$

Onde A = área da superfície gerada.

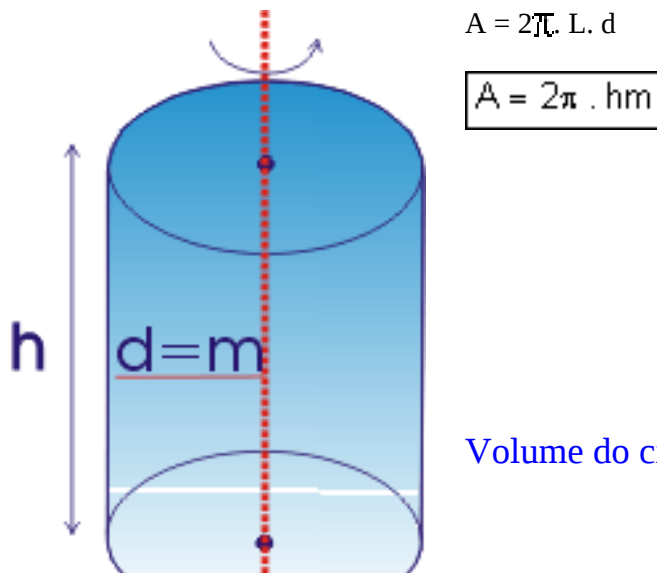
L = comprimento da geratriz

d = distância do centro da gravidade da geratriz ao eixo. O cálculo do volume do sólido de revolução pode ser feito, usando-se a fórmula

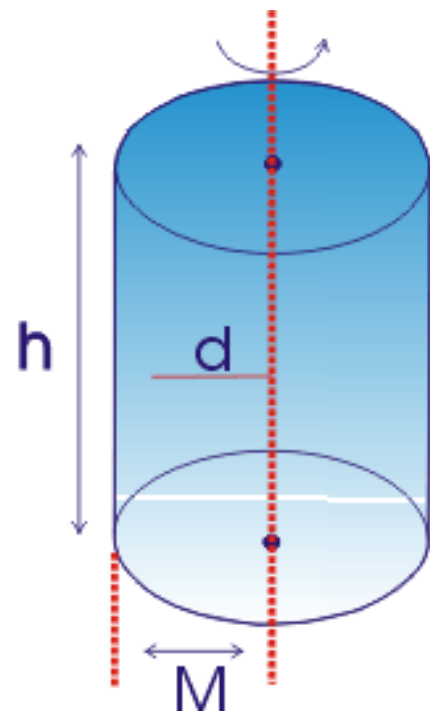
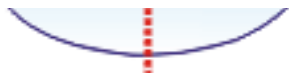
$$V = 2\pi \cdot S \cdot d$$

S = Área da superfície geradora.

Área lateral do cilindro de revolução



Volume do cilindro de Revolução

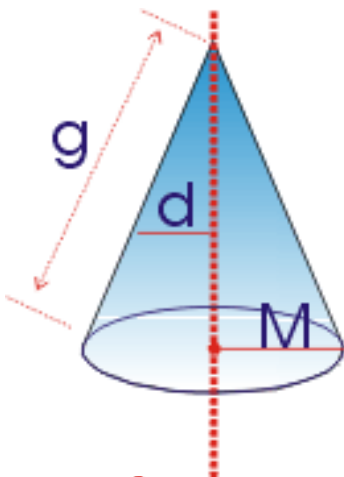


$$V = 2\pi$$

$$V = 2\pi \frac{M}{2}$$

$$V = \pi$$

Área Lateral de um cone de Revolução



$$A = 2\pi Ld$$

$$2\pi \cdot g \cdot \frac{1}{2} M$$

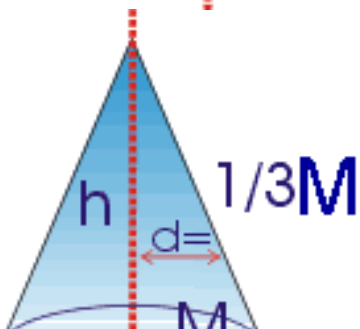
$$A = \pi \cdot M \cdot g$$

Volume de um cone de Revolução

$$V = 2\pi \cdot S \cdot d$$

$$V = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot M \cdot h \cdot \frac{1}{3} \cdot M$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi M^2 \cdot h$$



Página 1

Geometria Plana

Definição: sejam n pontos ($n > 3$), $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ de um mesmo plano, três a três não colineares, de modo que as retas determinadas por dois pontos consecutivos deixem todos os demais num mesmo semi-plano. Nestas condições a união dos segmentos $A_1, A_2, A_2, A_3, \dots, A_n, A_1$ é chamada de polígono convexo.

Para os demais dizemos: polígono de n lados.

Número de diagonais

Chama-se diagonal o segmentos que une dois vértices não consecutivos.

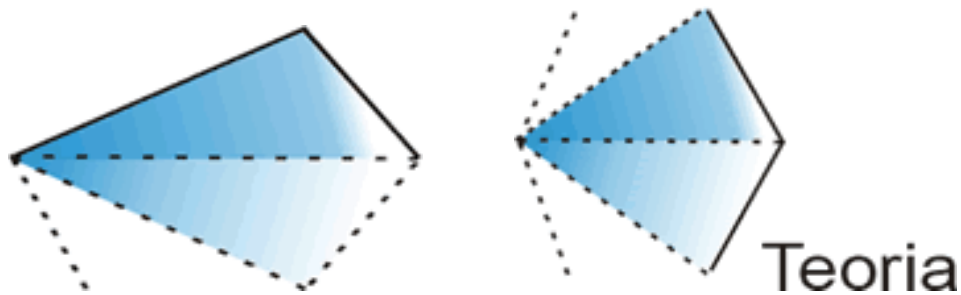
Cada vértice dá origem a $(n - 3)$ diagonais; menos 3, pois se eliminam o próprio vértice, e os dois vértices adjacentes.

Os n vértices dão origem a $n.(n - 3)$ diagonais.

Como cada diagonal foi contada duas vezes, temos: $d = \frac{n(n - 3)}{2}$

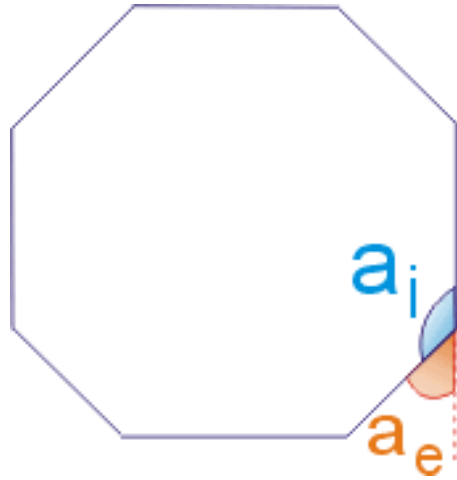
Soma dos ângulos internos S_i

Como ilustram as figuras a seguir, as diagonais que partem de um vértice, dividem o polígono em $(n - 2)$ triângulos. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , então a soma dos ângulos internos de um polígono é: $S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ$



Soma dos ângulos externos S_e

Sejam a_i e a_e os ângulos interno e externo respectivamente de um vértice de um polígono.



Nestas condições, em qualquer vértice, temos a_i e $a_e = 180^\circ$

Considerando os n vértices temos:

$$S_i + S_e = n \cdot 180^\circ$$

$$(n - 2) \cdot 180^\circ + S_e = n \cdot 180^\circ$$

$$n \cdot 180^\circ - 360^\circ + S_e = n \cdot 180^\circ$$

$$S_e = 360^\circ$$

Ângulo interno a_i e ângulos externo a_e .

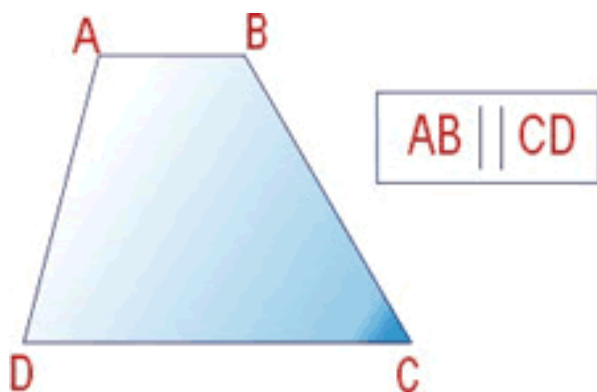
Se o polígono for regular (lados iguais e ângulos iguais) temos: e

$$a_i = \frac{S_i}{n} = \frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n} \quad \text{e} \quad a_e = \frac{S_e}{n} = \frac{360^\circ}{n}$$

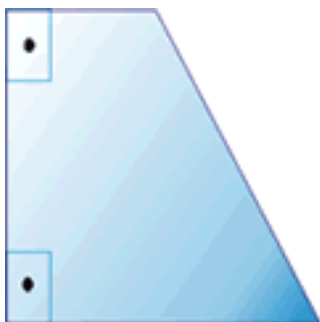
Quadriláteros notáveis

Trapézio

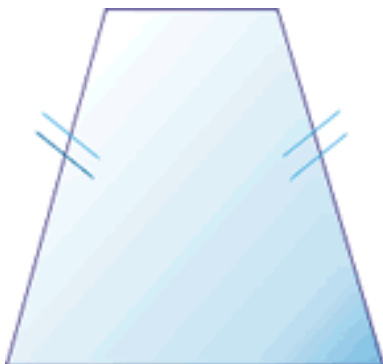
Tem dois lados paralelos.



Se tiver dois ângulos retos: trapézio retângulo.

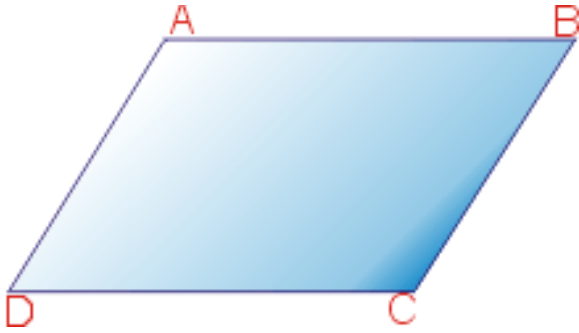


Se tiver os lados não paralelos iguais: trapézio isósceles.



Paralelogramo

Tem os lados paralelos dois a dois.



$$AB \parallel CD \text{ e } AD \parallel BC$$

Propriedades:

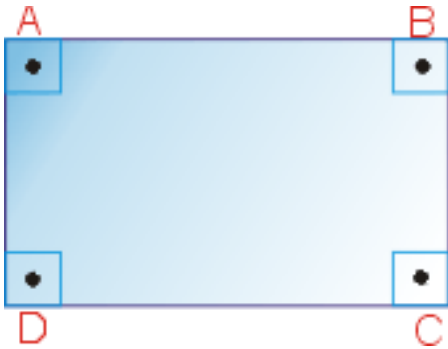
1ª - lados opostos iguais.

2ª - ângulos opostos iguais.

3ª - as diagonais se cortam ao meio.

Retângulo

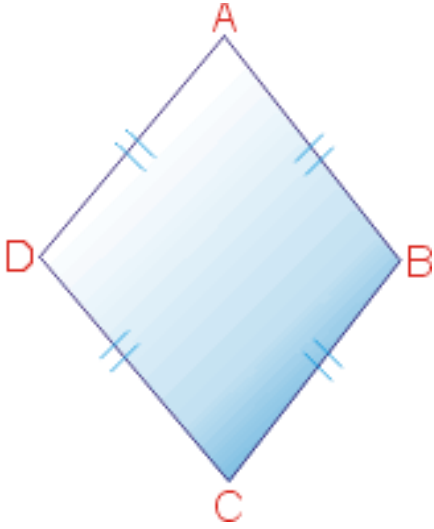
Paralelogramo com os quatro ângulos retos.



Além das três propriedades do paralelogramo, apresenta mais uma: as diagonais são iguais.

Losango

Paralelogramo com os quatro lados iguais.



Além das três propriedades do paralelogramo, apresenta mais duas: as diagonais são perpendiculares e as diagonais são bissetrizes dos ângulos.

Quadrado

Retângulo e losango ao mesmo tempo.

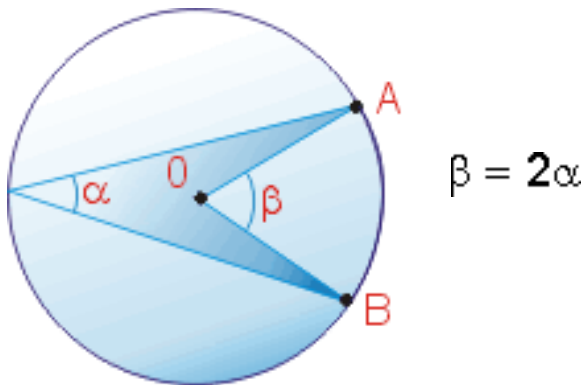


Apresenta as seis propriedades anteriores.

Circunferência e círculo

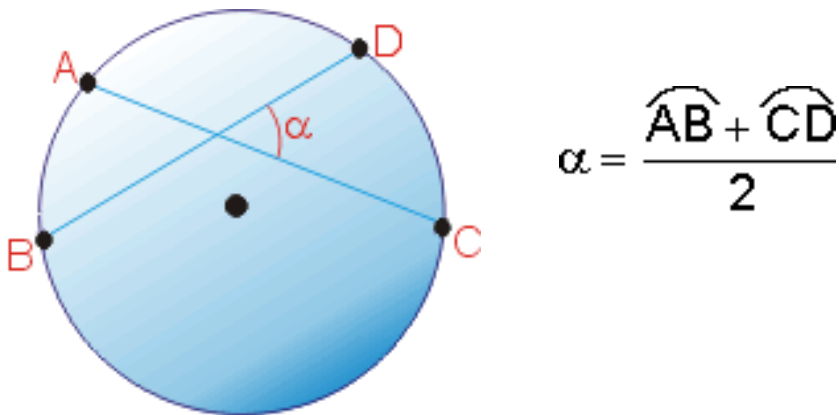
Ângulos na Circunferência

1. Ângulo Central (β) e Ângulo Inscrito (α).

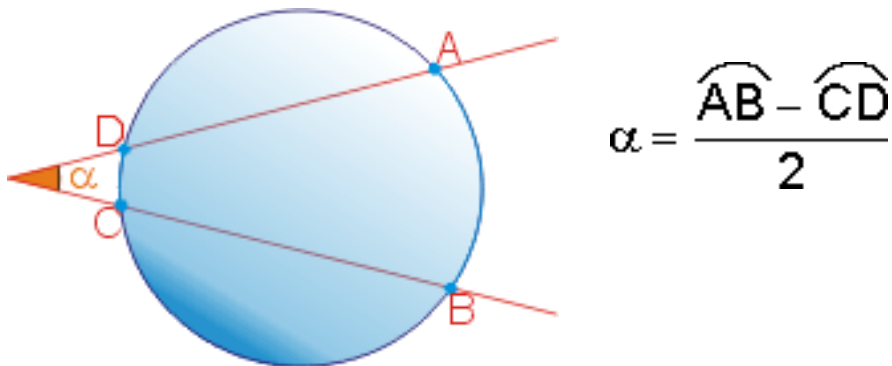


Obs. $\beta = \widehat{AOB}$ pois consideramos o raio OA unitário.

2. Ângulo Excêntrico Interior



3. Ângulo Excêntrico Exterior

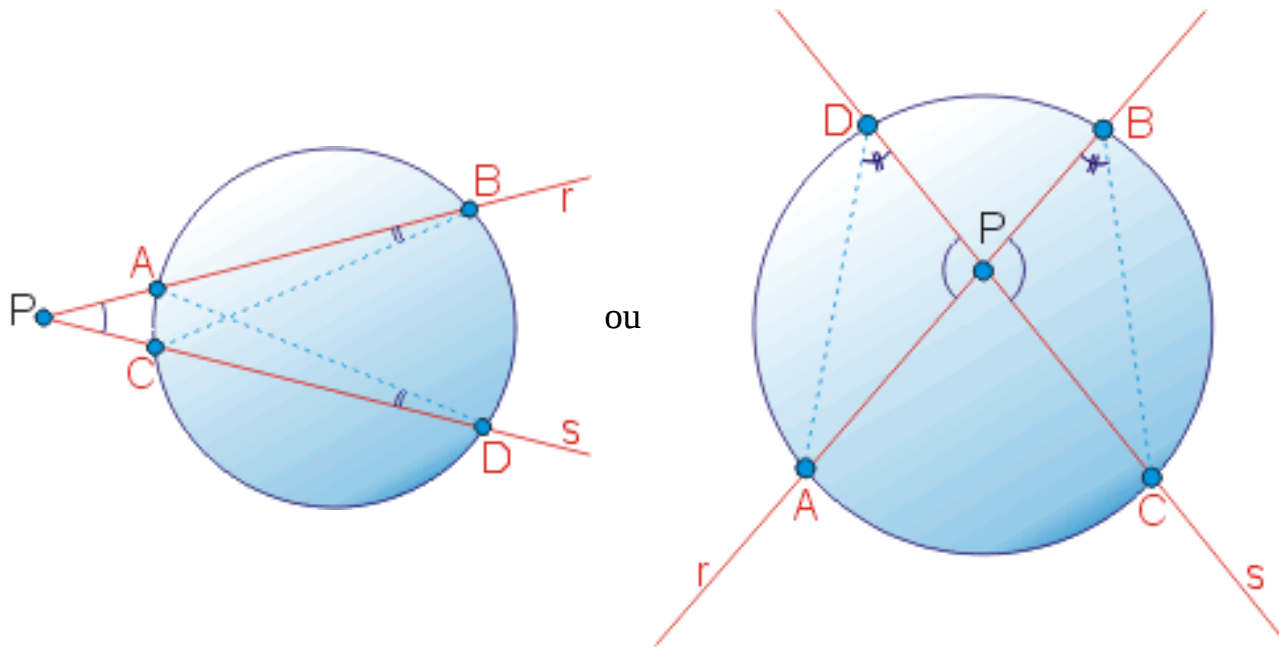


Potência de um ponto em relação a uma circunferência

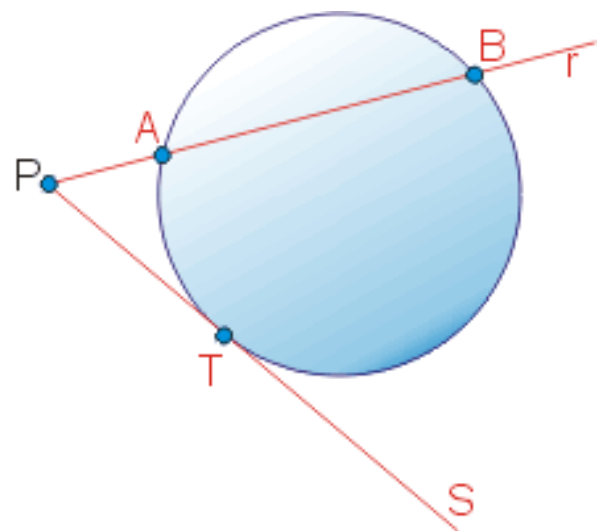
Nas figuras abaixo são dados um ponto P e uma circunferência. As retas r e s são retas secantes quaisquer à circunferência.

Os triângulos PAD e PCB são semelhantes, pelo critério AA, e portanto: $\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} \Rightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD$

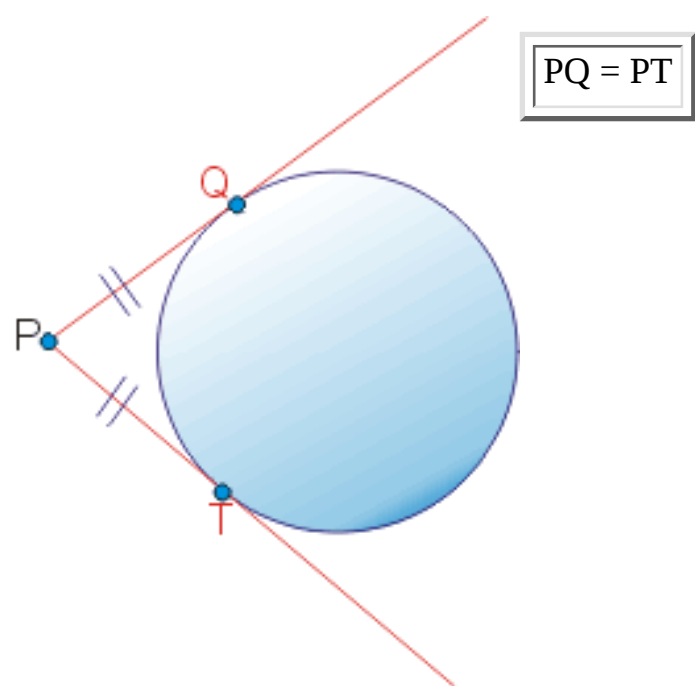
Este produto, que não depende das secantes consideradas, recebe o nome de potência do ponto em relação à circunferência.



No caso de P externo à circunferência, se a reta s for tangente, então $\hat{C} \equiv \hat{D} \equiv T$ o que resulta



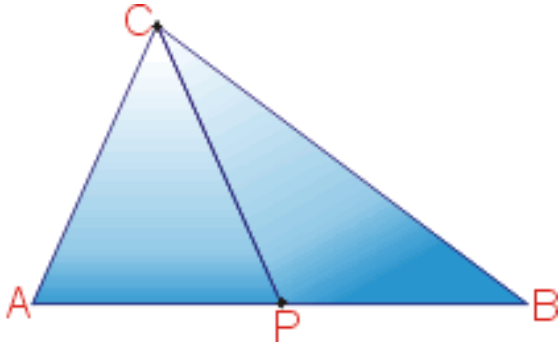
$PA \cdot PB = PT^2$ Se r também for tangente, então A B Q o que resulta $PQ^2 = PT^2$, ou seja



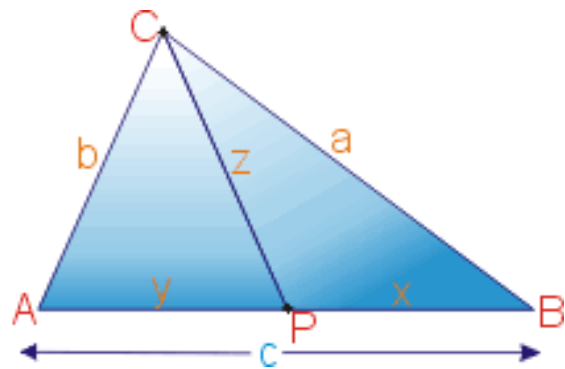
Cevianas de um triângulo

Pontos notáveis

Chama-se ceviana de um triângulo ao segmento que tem uma extremidade em um vértice e a outra num ponto qualquer do lado oposto.



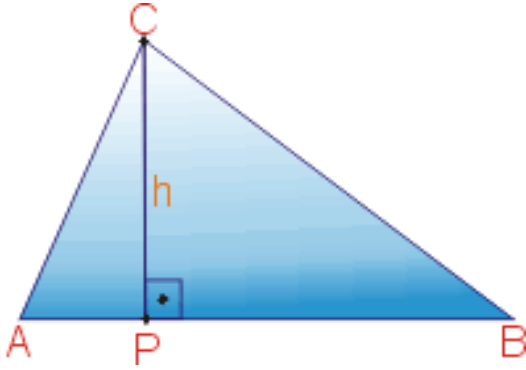
Relação de Stewart



$$a^2y + b^2x - z^2c = cxy$$

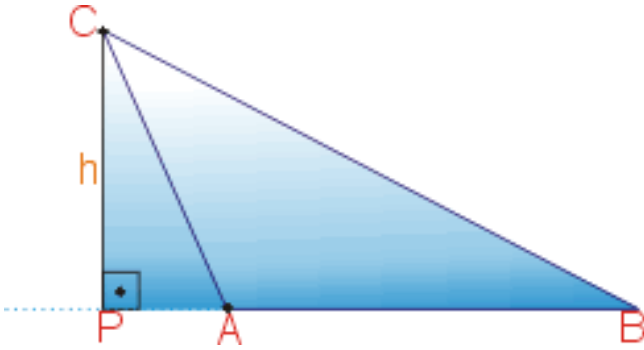
Altura

A ceviana CP é denominada **altura**, se CP for perpendicular a AB .



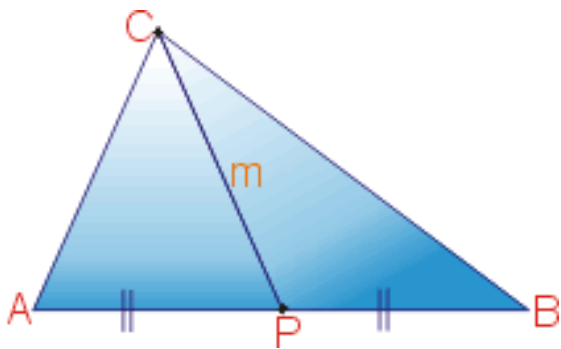
O cálculo da altura é feito aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos ACP e BCP .

Caso o ângulo $\hat{A}$ seja obtuso a altura é externa ao triângulo porém é obtida da mesma forma.



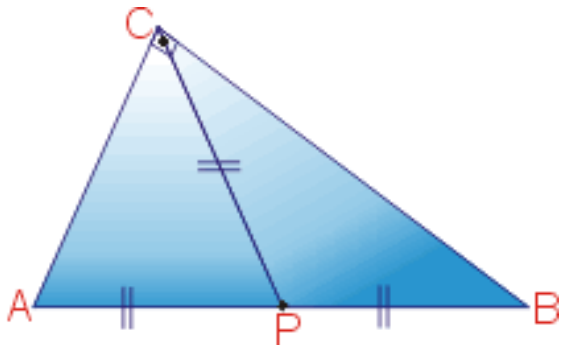
Mediana

A ceviana CP é denominada mediana, se P for o ponto médio de AB .



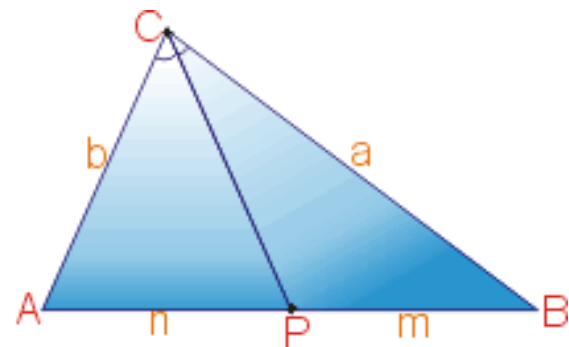
O cálculo da mediana é feito aplicando a relação de Stewart.

Um caso particular importante é quando o triângulo for retângulo em C. Posteriormente iremos demonstrar que a mediana é metade da hipotenusa.



Bissetriz

A ceviana CP é denominada bissetriz, se CP divide o ângulo ao meio.



O cálculo da bissetriz é feito aplicando a relação de Stewart e o teorema da bissetriz.

Teorema da Bissetriz: “A bissetriz divide o lado oposto na razão dos lados adjacentes.”

$$\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$$

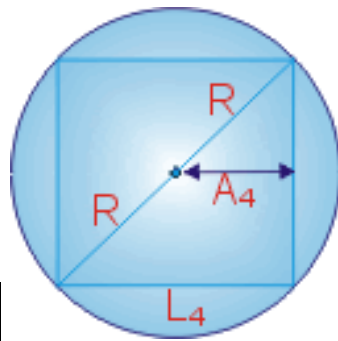
Página 14

Matérias > Matemática > Geometria Plana

Polígonos Regulares Notáveis

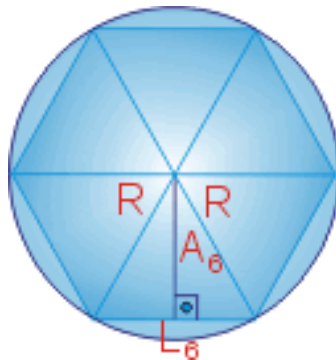
Polígono Regular inscrito numa circunferência de raio R: relações métricas

Quadrado



$$L_4 = R\sqrt{2} \quad a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

Hexágono

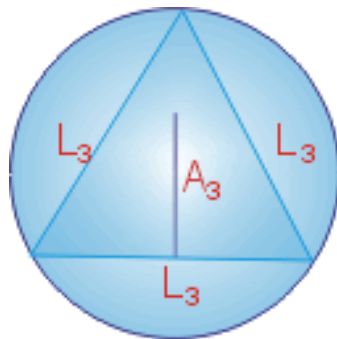


$$L_6 = R \quad a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

Página 15

Matérias > Matemática > Geometria Plana

Triângulo Equilátero



$$L_3 = R\sqrt{3} \quad a_3 = \frac{R}{2}$$

Triângulos e semelhança de triângulos

Soma dos ângulos internos

Igual a 180°

Ângulo externo

É igual a soma dos internos não adjacentes.

Existência

A medida de cada lado é menor que a soma da dos outros dois.

CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Dois triângulos ABC e A'B'C' são congruentes se tiverem os lados homólogos respectivamente congruentes, e os ângulos correspondentes com mesma medida.

Notação: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

O símbolo $\cong$ indica a semelhança na forma ($\sim$), e a igualdade na medida ($=$).

A definição acarreta seis congruências: três relativas aos lados e três relativas aos ângulos.

No entanto, a recíproca, ou seja, a quantidade de congruências necessárias para assegurar a congruências de dois triângulos, é de apenas três, através dos seguintes critérios:

1º - LAL (dois lados e o ângulo entre eles)

2º - ALA (um lado e os dois ângulos adjacentes)

3º - LLL

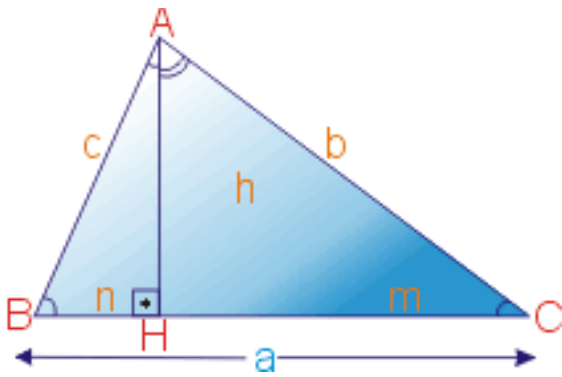
4º - LAA₀ (um lado, um ângulo adjacente e um ângulo oposto)

Página 17

Matérias > Matemática > Geometria Plana

Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Triângulo Retângulo



$$\triangle ABC \sim \triangle HAC \sim \triangle HBA$$

$$1) \frac{AC}{HC} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{b}{m} = \frac{a}{b} \Rightarrow b^2 = a \cdot m$$

$$1) \frac{AB}{HB} = \frac{BC}{BA} \Rightarrow \frac{c}{n} = \frac{a}{c} \Rightarrow c^2 = a \cdot n$$

2) Somando membro a membro

$$+ \begin{cases} b^2 = am \\ c^2 = an \end{cases}$$

$$b^2 + c^2 = am + an$$

$$b^2 + c^2 = a(m + n)$$

$$b^2 + c^2 = a \cdot a$$

$$b^2 + c^2 = a^2 \text{ (Teorema de Pitágoras)}$$

$$3) \frac{HA}{HB} = \frac{HC}{HA} \Rightarrow \frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Rightarrow h^2 = m \cdot n$$

$$4) \frac{AC}{BC} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{h}{c} \Rightarrow bc = ah$$

Seguimentos Proporcionais

Paralelismo

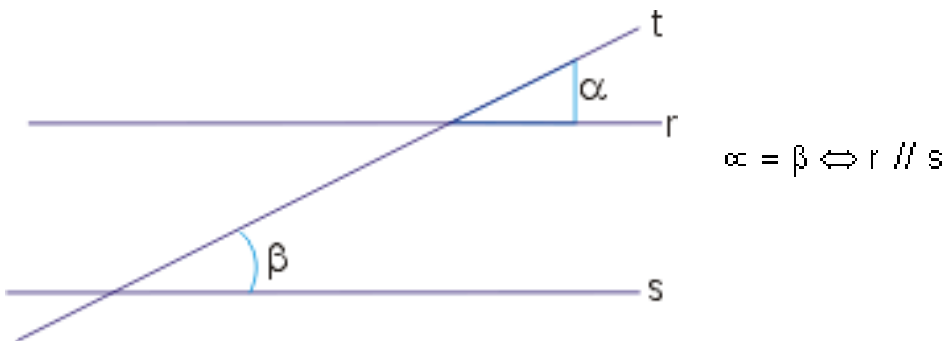
Duas retas de um mesmo plano são paralelas se, e somente se, são coincidentes ou tem intersecção vazia.

Postulados de Euclides

Por um ponto fora de uma reta é única a paralela a esta reta.

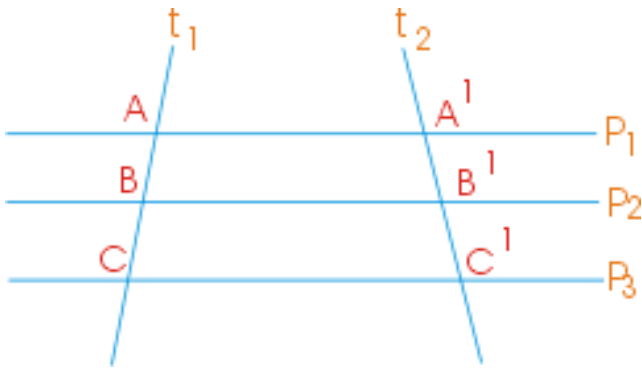
Teorema Fundamental do Paralelismo

Se duas retas coplanares distintas são cortadas por uma transversal, e formam com esta ângulos correspondentes de mesma medida, então elas são paralelas.



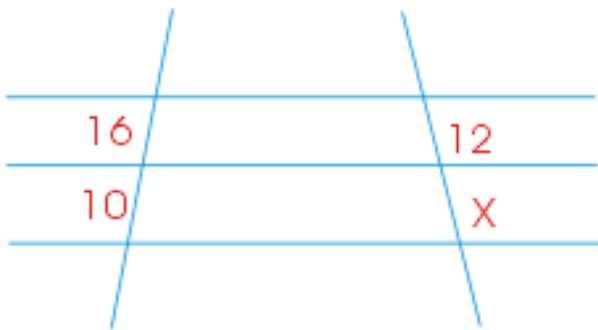
Teorema de Tales

“Se um feixe de retas paralelas tem duas transversais então a razão de dois segmentos quaisquer de uma transversal é igual à razão dos segmentos correspondentes à outra.”



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{BC}{B'D'}$$

Ex.



$$\begin{aligned}\frac{16}{10} &= \frac{12}{x} \\ 16 \cdot x &= 120 \\ x &= \frac{15}{4}\end{aligned}$$

Áreas de figuras Planas

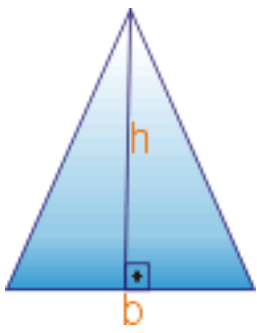
Postulado geral da área

"A um quadrado com lado de comprimento a corresponde uma área a^2 ."

A partir deste axioma deduzem-se todas as demais áreas das figuras planas.

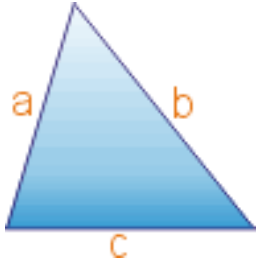
Triângulos

qualquer



$$S = \frac{b \cdot h}{2}$$

qualquer

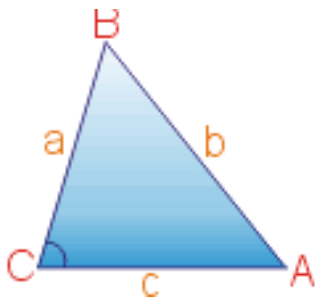


$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

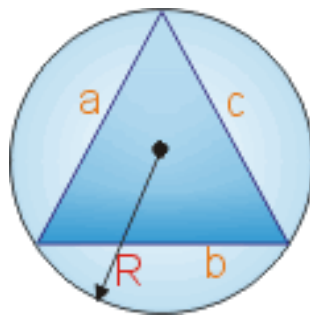
onde $p = \frac{a+b+c}{2}$

"fórmula de Heron"

qualquer qualquer

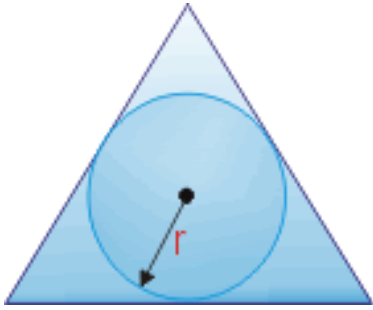


$$S = \frac{a b \sin \hat{C}}{2}$$



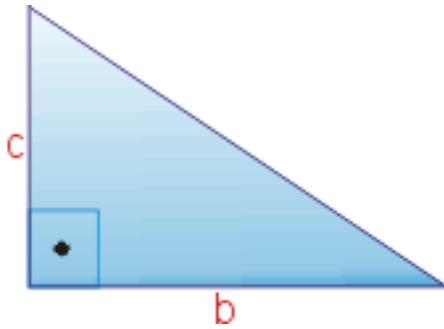
$$S = \frac{a b c}{4R}$$

Qualquer



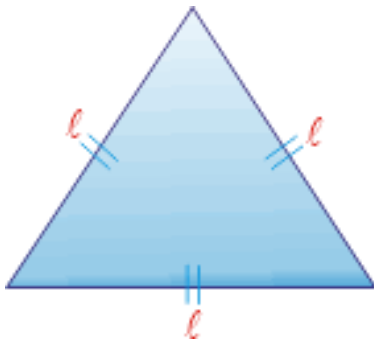
$$S = p.r$$

Triângulo retângulo



$$S = \frac{b.c}{2}$$

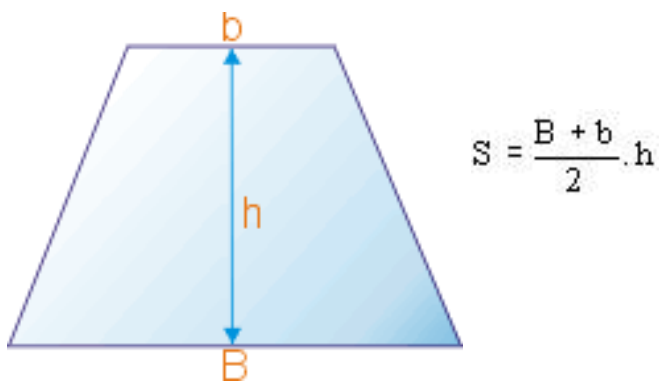
Triângulo equilátero



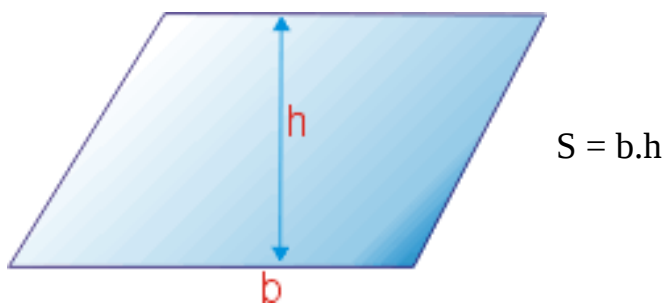
$$S = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$$

Quadriláteros Notáveis

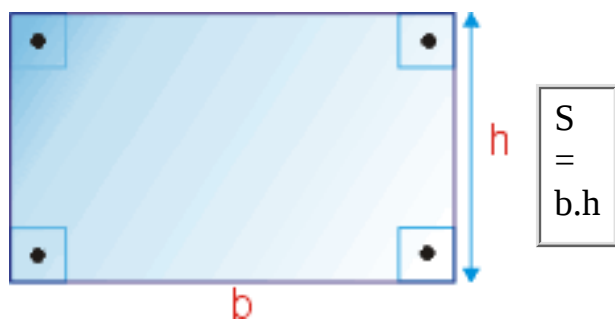
Trapézio



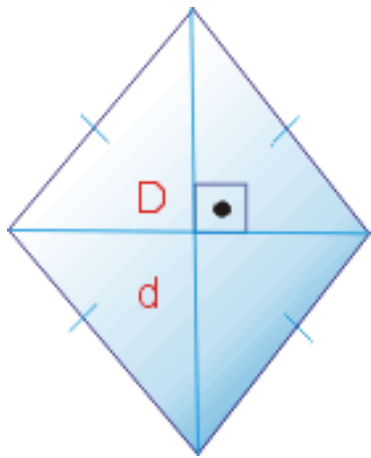
Paralelogramo



Retângulo

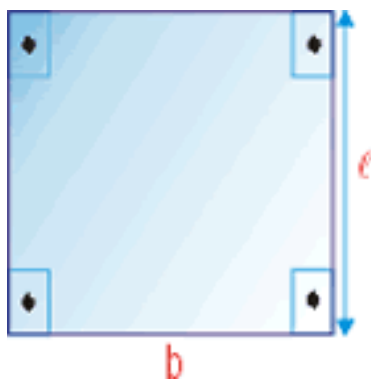


Losango



$$S = \frac{D \cdot d}{2}$$

Quadrado



$$S = l^2$$

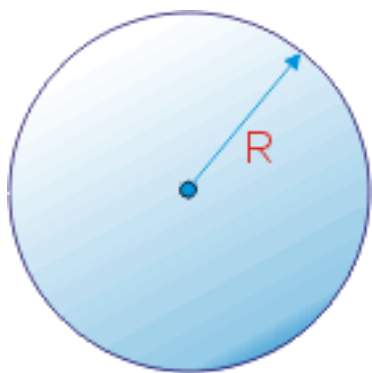
Polígono Regular

$$S = p \cdot r$$

Onde p é o semiperímetro, e r é o apótema (raio da inscrita).

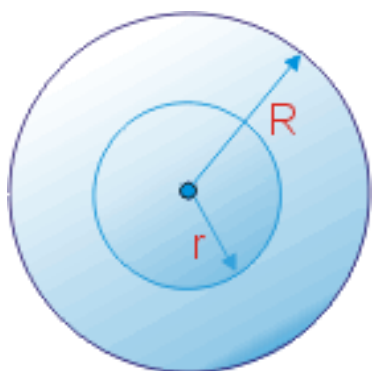
Regiões Circulares

Círculo



$$S = \pi R^2$$

Coroa circular

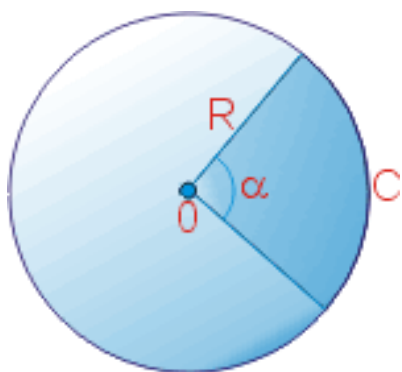


$$S = \pi (R^2 - r^2)$$

Página 25

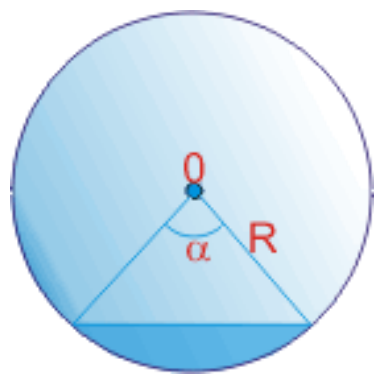
Matérias > Matemática > Geometria Plana

Setor Circular



$$S = \frac{cR}{2} = \frac{\alpha R^2}{2}$$

Segmento Circular



$$S = \frac{R^2}{2}(\alpha - \text{sen } \alpha) \quad \text{ou } (\alpha \in \mathbb{R})$$

29_7

Página 1

Matérias > Matemática > Noções de Estatística

Noções de Estatística

Definição

Conjunto de métodos que tem por objetivos a coleta, o tratamento e a interpretação desses dados.

Universo Estatístico

É o conjunto de todos os elementos que podem oferecer informações relativos ao estudo efetuado.

Amostra

É um subconjunto do universo estatístico que é retirado muitas vezes pela impossibilidade da análise deste.

Rol

É a lista dos dados numéricos da amostra ou da população analisada.

Amplitude

É a diferença entre o maior e o menor valor numérico encontrado no rol.

Página 2

Matérias > Matemática > Noções de Estatística

Frequência Absoluta

É o nº de vezes que um dado aparece no rol.

Ex:

Idade das Pessoas numa festa	Nº de Pessoas
18	3
19	7
20	12
21	8
22	7
23	5

Frequência Relativa

J_i	n_i	$n_i\%$
1	1	5%
2	4	20%
3	3	15%
4	3	15%
5	2	10%
6	2	10%
7	1	5%
8	1	5%
9	1	5%
10	2	10%

Numa classe o professor de educação física resolveu tabelar o nº de gols que cada aluno marcara e obteve a seguinte tabela.

(J_i = Jogador i) T_i = nº de gols do jogador i.

$n_i\%$ = Frequência percentual ou relativa.

$$n_i\% = \frac{n_i}{\sum n_i} \times 100\%$$

$$\sum f = 20 \quad \sum n_i\% = 100\%$$

Representações Gráficas

Os dados de uma tabela podem ser apresentados graficamente de vários modos:

I - Setores Circulares

Suponhamos por exemplo uma eleição com os candidatos x, y e z. Terminada a eleição a porcentagem de votos está representada na tabela abaixo:

candidato x	35%
candidato y	25%
candidato z	15%
votos em branco	16%
votos nulos	8%

Esses dados podem ser visualizados usando setores circulares (Fig. b) cujas áreas sejam proporcionais às frequências.

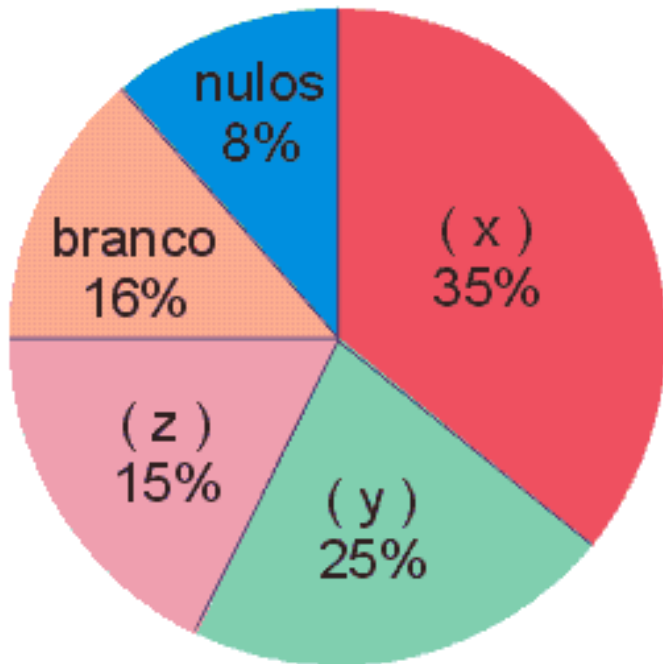
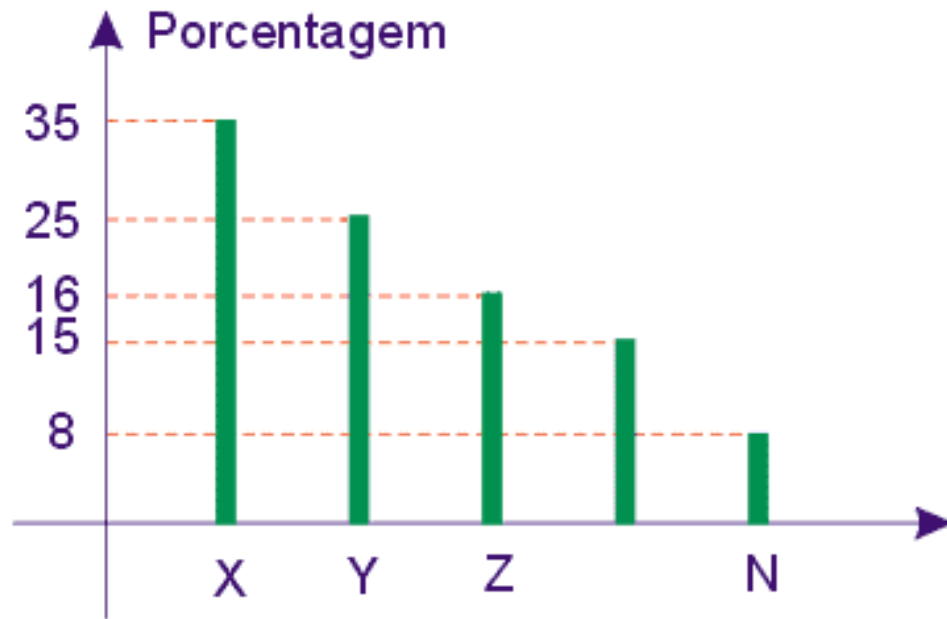


Fig. B

II - Gráfico de Barras

As porcentagens da tabela anterior podem ser representadas como na Fig. c, onde as alturas das barras são proporcionais às porcentagens.



III - Histograma

No caso em que os dados são agrupados em conjuntos de intervalos de números, podemos usar um histograma. Para ilustrar, suponhamos, por exemplo, uma situação em que em uma escola, as massas dos alunos têm a distribuição da tabela da Fig. d. Esses dados podem ser representados pelo histograma da Fig. e.

Massas (em kg)	Porcentagem
[50 ; 55[	7%
[50 ; 60[	15%
[60 ; 65[	20%
[65 ; 70[	30%
[70 ; 75[	25%
[75 ; 80[	3%

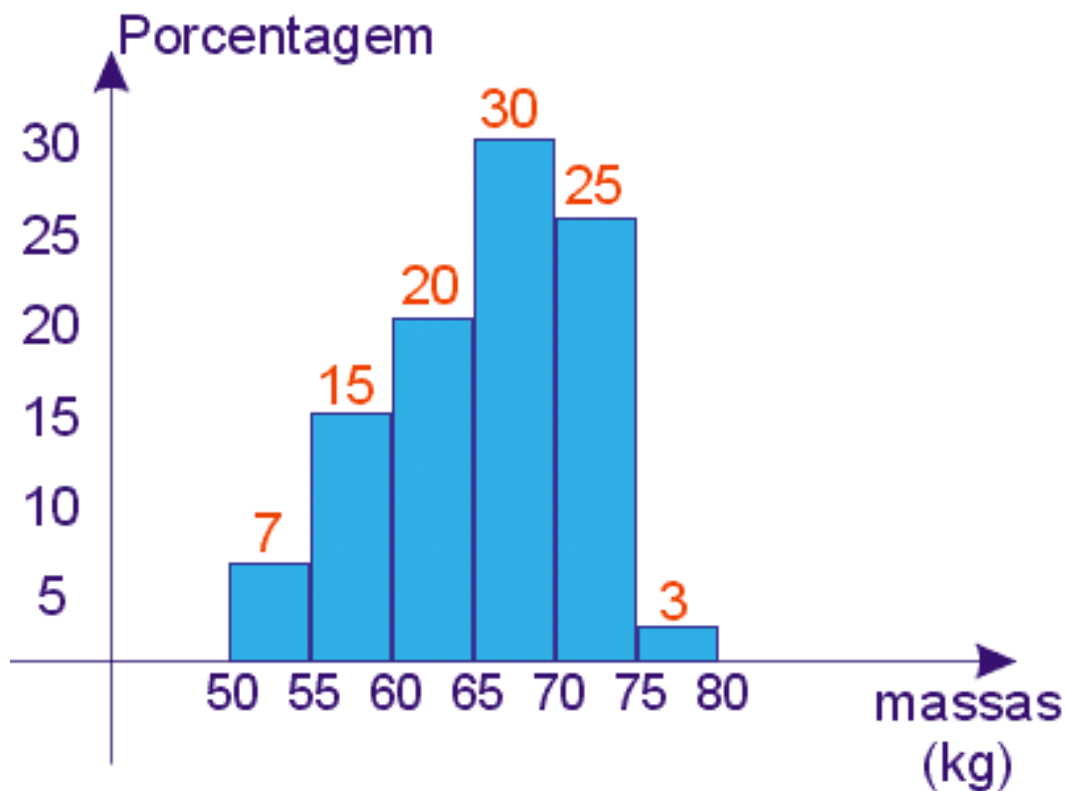


Fig. E



Medidas de tendência central

Média Aritmética

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} \text{ onde}$$

x_i = valor de cada elemento

n = nº total de elementos que compõe a média.

Desvio absoluto

$d = x - \bar{x}$ é uma medida de quanto cada elemento se afasta da média.

Moda

Num conjunto de dados é o valor que aparece com maior frequência.

Ex:

No Rol { 1, 2, 2, 5, 5, 5, 7, 7, 8, 12 }

A moda é 5.

Mediana

Num conjunto de dados é o valor x_i de um dado que divide a distribuição de modo que o nº de dados que se colocam antes dele é igual ao nº de dados após a mediana (Md).

Ex:

{ 5, 9, 11, 13, 20, 23, 25, 27 } $\Rightarrow$ Rol ordenado. A Md numa distribuição com nº par de termos (oito) deve estar entre o 4º e o 5º termo.

Assim $Md = \frac{13 + 20}{2} = 16,5.$

Página 7

Matérias > Matemática > Noções de Estatística

Medidas de dispersão

Variança

$$Var = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Desvio Padrão

$$\Delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

ou seja Desvio Padrão = $\sqrt{Var}$

30_2

Página 1

Noções sobre derivadas

Definição

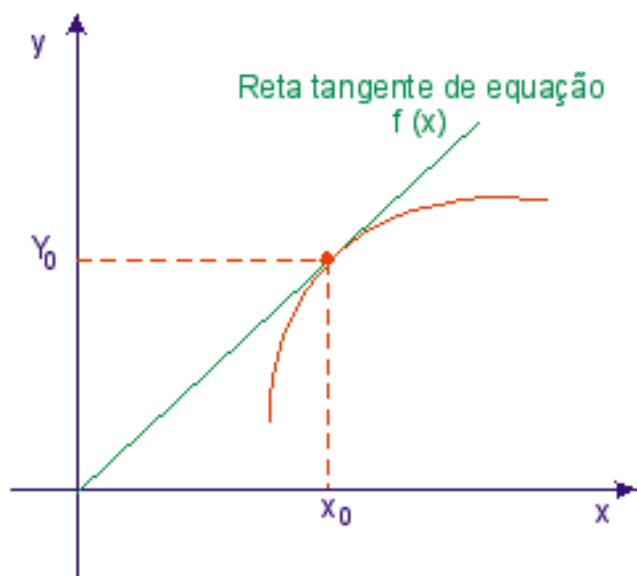
Chama-se derivada da função $y = f(x)$ no ponto $x = x_0$, ao número dado por.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right]$$

Indica-se por $f'(x)$ ou $\frac{dy}{dx}$

Intuitivamente a derivada mede a taxa de variação de uma grandeza y quando se faz variar uma outra grandeza x .

Graficamente ela é o declive "m" da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto (x_0, y_0) da mesma.



$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Regras de derivação

	Função	Derivada
1	$y = c \quad (c = \text{cte})$	$y' = 0$
2	$y = k \cdot x$	$y' = 1.k$
3	$y = x^n$	$y' = n.x^{n-1}$
4	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5	$y = x^a$	$y' = a.x^{a-1} \cdot \log_e x$
6	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
7	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$

Sejam u e v duas funções deriváveis no intervalo considerado.

Assim temos:

Derivada da soma $(u + v)' = u' + v'$

Derivada da subtração $(u - v)' = u' - v'$

Derivada da multiplicação $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Derivada da quociente $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u \cdot v'}{v^2} \quad (v \neq 0)$

Ex:

$$y = 2x^3 - 5x^2 + 4x + 3$$

$$y' = 2 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x^1 + 4 + 0$$

$$y' = 6x^2 - 10x + 4$$

Estudo da variação de uma Função

Uma função é crescente num certo intervalo do domínio então temos que $F'(x) \geq 0$.

Uma função é decrescente num certo intervalo do domínio x então temos que $F'(x) \leq 0$.

Noções sobre Limites

Seja a função $y = 3x - 2$. Vamos tentar estudar o que ocorre com o valor y da função para quando x tende a 2.

x	y
1	1
1,3	1,5
1,7	3,1
1,9	3,7
1,95	3,85
1,99	3,97

Assim vemos que quando x tende a 2 o valor y da função tende a 4.

Dizemos que y tende a b quando x tende a x_0 e indicamos

$$\lim y = b$$

$$x \rightarrow x_0$$

Propriedades

$$P_1 : \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2 \Rightarrow L_1 = L_2$$

$$P_2 : \text{Se } f \text{ é uma função definida por } f(x) = c \text{ (cte)}$$

Onde $C \in \mathbb{R}$ / para todo $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow a} C = C$$

$$P_3 = \text{Se } C \in \mathbb{R} / \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \text{ então } \lim_{x \rightarrow x_0} [C f(x)] = C.L.$$

$$P_4 = \text{Se } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M \text{ então :}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M$$

$$P_5 = \text{Se } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M \text{ então :}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$$

Ex:

Usando as propriedades, calcule o limite quando $x \rightarrow 2$ da seguinte função: $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 5x + 2) = \lim_{x \rightarrow 2} 3x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} (-5x) + \lim_{x \rightarrow 2} 2 =$$

$$= 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + (-5) \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 2 = 3 \cdot 4 - 5 \cdot 2 + 2 = 4$$

Ex:

Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1} \right)$

Verificamos claramente que a função $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ não está definida para $x = 1$ teremos $x - 1 = 0$.

Logo não podemos simplesmente substituir $x = 1$.

O que fazemos é:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{(x^2 - 1)}{x - 1} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

Que é o mesmo valor encontrado se tendessemos o valor de x a 1.

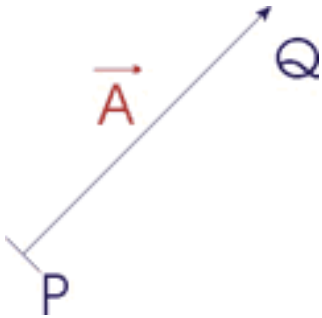
Álgebra Vetorial

Um escalar é uma quantidade física caracterizada por intensidade, tal como massa tempo ou temperatura.

Vetor

É uma quantidade física caracterizada por intensidade, direção e sentido. São exemplos força, deslocamento ou velocidade.

Graficamente um vetor $\vec{A}$ é representado por um segmento de reta orientado $\overrightarrow{PQ}$ como ilustra a figura.



Se multiplicarmos o vetor $\vec{A}$ por um número m qualquer, o vetor resultante desta operação tem:

Intensidade:

$$|m| \cdot |\vec{A}|$$

Sentido:

O mesmo de $\vec{A}$ se m for positivo.

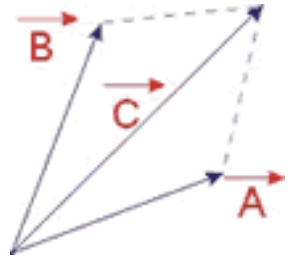
O contrário de $\vec{A}$ se m for negativo.

Direção:

A mesma de $\vec{A}$.

Adição de vetores

Dados dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ a soma ou resultante $\vec{C}$ é mostrada graficamente:

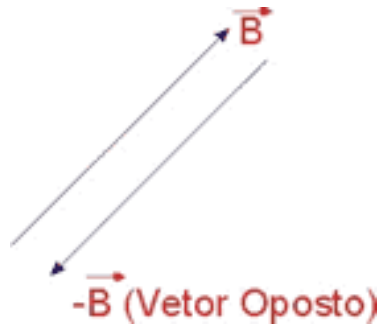


Vetor Oposto

Dado um vetor $\vec{B}$ define-se como vetor oposto um vetor com as seguintes características.

Mesma intensidade e direção de $\vec{B}$ e sentido contrário ao de $\vec{B}$.

Assim graficamente:

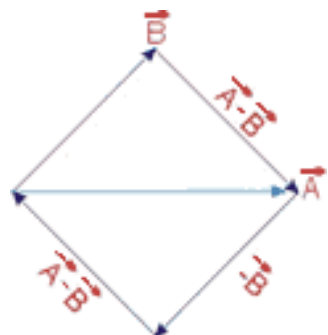


Subtração de vetores

Dados 2 vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ definimos o vetor subtração $\vec{A} - \vec{B}$ como uma soma de $\vec{A}$ com o vetor oposto de $\vec{B}$.

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

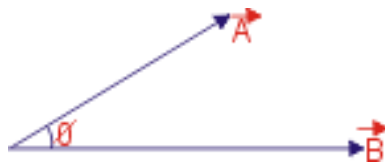
Graficamente:



Produto Escalar de 2 vetores

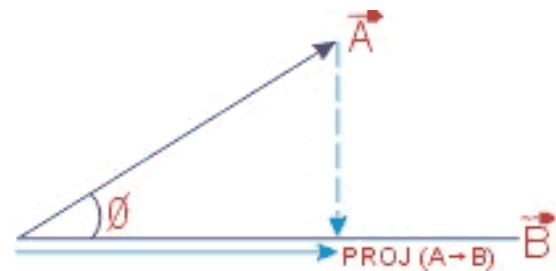
O Produto escalar ou produto interno de dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ é um escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$ ($\vec{A}$ Escalar $\vec{B}$) dado pela relação:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \varnothing$$



Onde $\varnothing$ é o ângulo entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$. ($0 \leq \varnothing \leq \pi$)

Temos que $\cos \varnothing = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|}$ e com isso podemos calcular a projeção do vetor $\vec{A}$ sobre o vetor $\vec{B}$.



$$\text{Proj}(\vec{A} \rightarrow \vec{B}) = |\vec{A}| \cdot \cos \varnothing$$

$$\text{Proj}(\vec{A} \rightarrow \vec{B}) = |\vec{A}| \cdot \left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{(\vec{A}) \cdot (\vec{B})} \right)$$

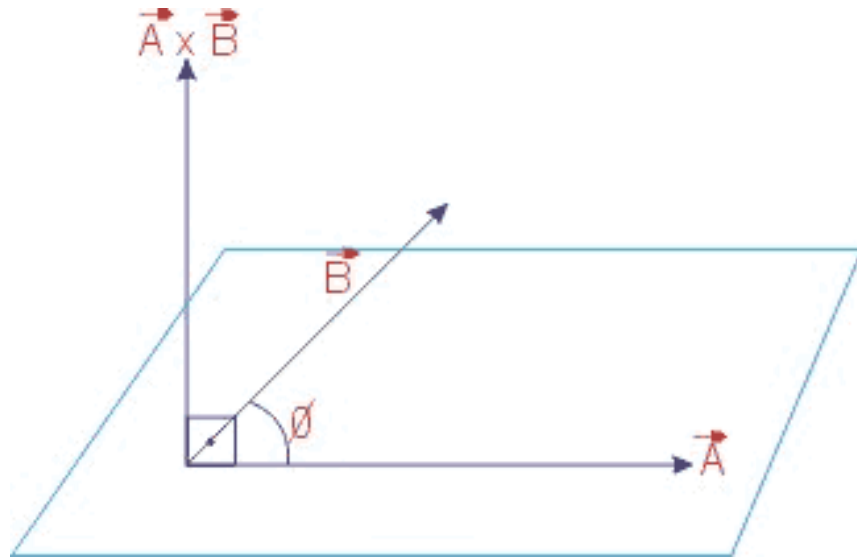
Produto Vetorial de 2 vetores

O produto vetorial ou produto externo de 2 vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ é um vetor $\vec{A} \times \vec{B}$ (ler $\vec{A}$ vetor $\vec{B}$) dado por.

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \text{Sen} \varnothing$$

Onde $\varnothing = \hat{\text{Ângulo entre } \vec{A} \text{ e } \vec{B}} (0 \leq \varnothing \leq \pi)$

Graficamente:



Note que o produto vetorial $\vec{A}$ e $\vec{B}$ é perpendicular ao plano formado por $\vec{A}$ e $\vec{B}$.